INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f''(x) = 0$.

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Trouver les constantes réelles a, b, c qui vérifient : $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x+1}$

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

4. Étudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

5. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $f(z) = 1+i$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur R^{+*} par : $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

2. La fonction f admet-elle un point fixe ?

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. On introduira la fonction g définie par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

2. Étudier le signe de la suite (u_n) pour a négatif.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) pour a négatif.

4. On suppose que a>0.
   - Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$

- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé par une fonction *f* définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$, où *a* et *b* sont deux nombres entiers naturels. On donne $e \approx 2{,}7 ; \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe pour *a*=3 et *b*=1 (on étudiera également sa convexité).

2. Déterminer la valeur de *b* pour que la tangente au graphe de *f* au point d'abscisse 1 soit horizontale.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de *a*.

4. Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artisan sur une seule face (partie entre le sol et le toboggan). Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis ?

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x)=\dfrac{Ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x)=\dfrac{(2-Ln(1+x))}{2(\sqrt{1+x})(1+x)}$ et elle est du signe du numérateur qui s'annule pour $x=e^2-1$. La limite à plus l'infini est nulle. L'axe horizontal donne une asymptote.

x	0	e^2-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0 ↗	2/e	↘ 0

2. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

En posant $u=\sqrt{1+x}$, on obtient :

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=4\int_1^{\sqrt{2}} Ln u \; du=4\left[u\,Ln u-u\right]_1^{\sqrt{2}}=4(\sqrt{2}\,Ln\sqrt{2}-\sqrt{2}+1)$$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f''(x)=0$.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x)=\dfrac{-[2+3(2-Ln(1+x))]}{4(1+x)^{5/2}}$. Cette dérivée seconde est nulle quand le numérateur est nul.

Soit $2+3(2-Ln(1+x))=0$ ou encore $Ln(1+x)=8/3$, soit $x_0=e^{8/3}-1$. La fonction est concave sur $[0,x_0]$

Exercice n° 2

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x^3+x^2+x+1}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

On peut remarquer que le dénominateur s'écrit : $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$.

Sa dérivée est égale à : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(3x^2+3x+2)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$ qui s'annule uniquement en 1.

Le graphe de la fonction passe par les points de coordonnées (0,1) ; (1/3 ,0) et (1,-1/2). L'axe ox est une asymptote horizontale et l'axe d'équation x=-1, une asymptote verticale.

x	$-\infty$	-1	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-		+
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	↗	0

2. Trouver les constantes *a*, *b*, *c* qui vérifient : $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+1}$

Par identification des polynômes, on obtient : *a*=-2 ;*b*=-1 et *c*=2.

3. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{-2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}\right)dx=\left[-Ln(x^2+1)-Arctg\,x+2Ln(x+1)\right]_0^1=Ln2-\frac{\pi}{4}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction peut s'écrire : $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{2}{1+x}$. Cette fonction admet la droite d'équation *y*=*x*-1 comme asymptote oblique et la droite *x*=-1 comme asymptote verticale.

Sa dérivée est égale à : $f'(x)=1-\dfrac{2}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$ et elle s'annule pour $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $f(-1-\sqrt{2})=-\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ et $f(-1+\sqrt{2})=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Tableau des variations :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ -		-		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	↗	$+\infty$

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

On pose $Y = y+2; X = x+1$ pour obtenir la fonction impaire : $Y = X + \frac{2}{X}$. Le point de coordonnées (-1, -2) est donc un centre de symétrie.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2Ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2Ln2$$

4. Étudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

Si la suite est convergente vers une limite *l*, alors cette limite vérifie : $l = f(l)$, soit *l*=1.
La seule limite possible est donc 1. Tous les termes de la suite sont positifs.
Si $u_0 = 0$ ou 1, alors $u_n = 1$ et la suite est stationnaire en 1.

On remarque que : $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

Si $u_0 < 1$. On suppose que $u_n < 1$, alors $u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1+u_n^2}{1+u_n} < 1 \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) < 0$, ce qui est vrai. Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{1+u_n} > 0$. La suite est donc croissante et majorée, et elle converge vers 1.

Si $u_0 > 1$, par un raisonnement analogue, la suite est décroissante minorée et elle converge vers 1.

5. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1+i$

On pose $z = x + i\,y$, d'où $1 + (x+i\,y)^2 = (1+i)(1+x+i\,y)$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 1+x-y = 1+x^2-y^2 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases}$$

Si $x+y-1=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $-x^2+x-1=0$ qui n'admet pas de racines réelles.

Si $x-y=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $2x^2-2x-1=0$, soit $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} = y$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^{+*} par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=e^{-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et sa dérivée est égale à : $f'(x)=(\frac{1}{1+x}-Ln\left(1+\frac{1}{x}\right))\,f(x)$

Le signe de la dérivée est celui de $u(x)=\frac{1}{1+x}-Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On a : $u'(x)=\frac{1}{x(1+x)^2}>0$

La fonction *u* est strictement croissante de R^{+*} sur $\left]-\infty,0\right[$ et la fonction *f* est donc décroissante de R^{+*} sur $\left]1,0\right[$. On peut prolonger *f* par continuité en zéro, en posant : *f*(0)=1.

2. La fonction *f* admet-elle un point fixe ?

Il faut donc résoudre l'équation $f(x)=x$, à savoir : $-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=Ln\,x$.

Soit $-x\,Ln(1+x)+(x-1)\,Ln\,x=0$. On pose $t=-x\,Ln(1+x)+(x-1)\,Ln\,x$,

puis $t'=Ln\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{1}{x(x+1)}<0$ et la fonction *t* est continue, strictement décroissante, à valeurs dans *R*, elle admet donc une unique valeur nulle, et donc un seul point fixe pour la fonction *f*.

Exercice n° 5

Soit *a* un nombre réel fixé non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=a$ et la relation de récurrence : $u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

On a : $u_{n+1}-u_n=e^{2u_n}-e^{u_n}-u_n$. Posons $g(x)=e^{2x}-e^{x}-x$. Sa dérivée est égale à : $g'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1=(e^{x}-1)(2e^{x}+1)$ qui s'annule en zéro (minimum) et qui est toujours positive. Par conséquent $u_{n+1}-u_n\geq 0$ et la suite est croissante.

2. Étudier le signe de la suite (u_n) pour *a* négatif.

Si *a* = 0, la suite est stationnaire égale à 0.
Si *a* < 0, on vérifie par récurrence que $u_n<0$, en effet $u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n}=e^{u_n}(e^{u_n}-1)<0$

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) pour *a* négatif.

La suite étant croissante et majorée par zéro, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation ; *g(l)* = 0, soit *l* = 0.

4. On suppose que $a > 0$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$
- Déterminer la limite de la suite (u_n)

D'après la première question, la suite est croissante ainsi que la fonction g (sur les réels positifs), donc $g(u_n) \geq g(a)$, ce qui est l'inégalité demandée.
On a : $u_n - a = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - a) \geq n\, g(a)$.
La suite converge donc vers plus l'infini.

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[1, 8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x) = (ax + b)\, e^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe pour $a = 3$ et $b = 1$ (on étudiera également sa convexité).

On obtient $f'(x) = (2 - 3x)\, e^{-x}$. Cette dérivée est toujours négative sur l'intervalle considéré et la fonction est décroissante de $[1, 8]$ sur $[4/e, 25/e^8]$.
Sa dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (3x - 5)\, e^{-x}$. La fonction est concave pour $x < 5/3$ et convexe pour $x > 5/3$.

2. Déterminer la valeur de b pour que la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il faut que la dérivée soit nulle en 1, soit $f'(x) = (-ax - b + a)\, e^{-x}$ et $f'(1) = (-b)\, e^{-1} = 0$, donc $b = 0$.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de a.

On a : $f(x) = ax\, e^{-x}$ et pour $x = 1$, $3{,}5 \leq y = f(1) = \dfrac{a}{e} \leq 4$. Comme $e \approx 2{,}7$, on obtient $a = 10$.

4. Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artisan sur une seule face (partie entre le sol et le toboggan). Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis (on donne $e \approx 2{,}7; \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$) ?

Calculons la surface à peindre, soit $I = \int_1^8 10x\, e^{-x}\, dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I = \left[-10\, x\, e^{-x}\right]_1^8 - \int_1^8 10\, e^{-x}\, dx = -80\, e^{-8} + 10\, e^{-1} - 10\left[-e^{-x}\right]_1^8 = -90\, e^{-8} + 20\, e^{-1} \approx 7{,}4$$

Donc le devis sera de 200+30*7,4=422 euros.