CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

*   *

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de τ est $\tau'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$. La fonction τ est donc décroissante de -1 à $+\infty$. La dérivée de ϕ est $\phi'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et la fonction ϕ est croissante de -1 à 0.

❷ La fonction ϕ étant croissante, on a $I_{k+1} \subset I_k$ et comme τ est décroissante, $J_{k+1} \subset J_k$.

❸ La résolution de l'inéquation $x^2 + 2kx + 1 > 0$, montre que le domaine de définition de f_k est $I_k \cup J_k$. On en déduit que le domaine de définition de f est $I_n \cup J_n$

❹ $\underset{x \to +\infty}{Lim}\left(f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\right) = k$ et $\underset{x \to +\infty}{Lim} f(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE n° 2

❶ Le domaine de définition de f est l'intervalle $[2, +\infty[$

❷ On trouve $f^2(x) = 2\big((x-1) + |x-3|\big)$ et $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 2 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{x} - 2 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$

❸ Les coulpes d'entiers naturels qui vérifient $y = f(x)$ sont (2,2) et (3,2)

❹ Comme la fonction f est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de g par rapport à la première bissectrice. On obtient $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

PROBLEME

❶ Les tableaux de variation des fonctions $x - \sin x$ et $\sin x - \frac{2x}{\pi}$ permettent de vérifier la première inégalité. Il en est de même pour la deuxième.

❷ Le domaine de définition de g est l'ensemble des nombres réels non entiers. La dérivée de g est $g'(x) = 2(1 + \frac{1}{\sin^2 \pi x})$. La fonction g est strictement monotone sur chaque intervalle de la forme $]n, n+1[$. Il existe donc une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur chacun de ces intervalles.

Soit $\beta_n = \alpha_n - n$, on a : $g(\beta_{n+1}) = -2(n+1) < g(\beta_n)$ et comme g est strictement croissante, $\beta_{n+1} < \beta_n$. On vérifie aisément que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. La suite (β_n) est décroissante minorée, donc elle converge vers une limite l.

Supposons que la limite l. On a $g(n + \beta_n) \geq 2(n+1) + 2\beta_n - \frac{1}{2\beta_n}$ et cette dernière expression est négative (car $g(\alpha_n) < 0$). On en déduit une impossibilité par passage à la limite, donc $l = 0$.

❸ La dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{\pi \sin x}{4} g(x)$. Si n est pair, la fonction f est décroissante sur $[n, \alpha_n]$ et croissante sur $[\alpha_n, n+1]$. Pour n impair, la variation est en sens contraire.

En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$, on vérifie l'inégalité proposée.

Le graphe de la fonction f est compris entre les droites $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$v_n = \int_{n+1/4}^{n+1/2} h(x)\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{n+1/4}^{n+1/2}(2x+1)\sin \pi x\,dx - \frac{1}{2}\int_{n+1/4}^{n+1/2}\cos \pi x\ dx$$

On calcule alors chacune des deux intégrales précédentes

La première se calcule par intégration par parties et on obtient : $\frac{1}{4}(2n+\frac{3}{2})(-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$

La deuxième se calcule de la même façon pour obtenir : $\frac{(-1)^n}{2\pi}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

On obtient alors le résultat demandé.