ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE N° 1

❶ Etudier sur [1, +∞ [, les sens de variation des fonctions τ et φ telles que

$$\tau\,(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1} \quad et \quad \varphi\,(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$$

❷ Pour k ∈ N* , on pose $\mathrm{I_k} = \left[-\mathrm{k} + \sqrt{\mathrm{k}^2 - 1}\,, +\infty \right[\quad et \quad \mathrm{J_k} = \left] -\infty\,, -\mathrm{k} - \sqrt{\mathrm{k}^2 - 1} \right]$.

Montrer que les suites $(\mathrm{I_k})_{k \geq 1}$ et $(\mathrm{J_k})_{k \geq 1}$ sont des suites décroissantes de segments emboîtés pour l'inclusion.

❸ On pose $\mathrm{f_k}\,(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{k\,x} + 1}\,,\ \mathrm{k} \in \mathrm{N}^*$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f_k en fonction de I_K et J_k.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction f telle que

$$f(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$$

❹ Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE N° 2

On considère la fonction

$$f:\ x\mapsto f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

❶ Déterminer l'ensemble de définition de f

❷ Calculer $[f(x)]^2$, simplifier f (x) et tracer C_f, courbe représentative de f , dans un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ du plan.

❸ Déterminer l'ensemble des couples (x , y) d'entiers naturels tels que y = f (x).

❹ Soit g la restriction de f à [3, + ∞ [, Montrer que g est une bijection de [3, + ∞ [sur un intervalle J à déterminer.

Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur J.

Déterminer la fonction g^{-1} et tracer sa courbe représentative sur le même graphique que C_f

PROBLEME

❶ Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\Pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\Pi}\le \sin x\le x$ *et* $1-\frac{2x}{\Pi}\le\cos x\le\frac{\Pi}{2}-x$

❷ Soit la fonction g définie par g(x) = $2x+1-\frac{2}{\Pi}\text{cotan}(\Pi x)$

① Déterminer D ensemble de définition de g

Etudier le sens de variation de g sur D.

② Montrer que l'équation g (x) = 0 admet, pour tout entier relatif n , une solution unique α_n appartenant à] n, n + 1 [

③ Montrer que g (x + n) = g (x) + 2 n , n ∈ Z , x ∈ D

④ On pose $\beta_n = \alpha_n - n$ pour n ∈ N

Montrer que la suite (β_n) est décroissante et que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. En déduire que la suite (β_n) est convergente.

⑤ Montrer que, pour tout t de] 0, $\frac{1}{2}$] , on a :

$$g\ (n+t) \geq 2\ (n+1) + 2t - \frac{1}{2t}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n$

⑥ Etudier la suite (μ_n) telle que $\mu_n = \alpha_{-n} + n$

❸ Soit f : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}\left[1 - (2x+1)\cos(\Pi x)\right]$

① Etudier le sens de variation de f sur $[\, n, n+1\,]$, suivant la parité de n.

② Montrer que pour $x > -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x \leq f\,(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Démontrer une relation analogue pour $x \leq -\frac{1}{2}$

③ Tracer la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé du plan, pour x ∈ $[\,-3, 3\,]$

④ On pose h(x) = $\frac{\Pi}{4}.g(x).\sin(\Pi x)$, $x \in \left] n, n+1 \right[$, $n \in N$, et

$v_n = \int_{n+\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{2}} h(x)dx$.

Montrer que $v_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{8}\right)$ et étudier la suite (v_n).