CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La fonction f n'est pas, à priori, définie en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} - 1)}{x} = 1$$

La fonction φ est donc continue en posant $\varphi(0) = 1$

❷ La dérivée de φ est, $\phi'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

On étudie alors le signe de $y = e^x(x-1)+1$. sa dérivée est : $y' = e^x(x-1) + e^x = xe^x$

La fonction y est donc croissante sur R^+, décroissante sur R^- et nulle en 0. On en déduit que φ' est toujours positive et donc que φ est strictement croisante de R sur R^+.

❸ Représentation graphique de la fonction φ . On remarque que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ et elle a donc une branche parabolique dans la direction oy. D'autre part, l'axe des abscisses est une asymptote.

❹ g est définie sur R pour $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et $x \neq 0$ et d'après ce qui précède elle est définie sur R^*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{\varphi(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1 + \frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie aisément que E est un espace vectoriel réel.

❷ Soit $f \in E_p \cap E_i$ alors pour tout réel x, on a :

$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-x)] = 0$, donc $E_p \cap E_i = \{0\}$

❸ Soit une combinaison linéaire nulle des 3 applications f_1, f_2, f_3, à savoir :

$$a\cos t + b\cos 2t + c\cos 3t = 0$$

Pour $t = 0$, on obtient $a + b + c = 0$.

On calcule alors la dérivée seconde et la dérivée quatrième, puis on remplace t par 0, on trouve : $a + 4b + 9c = 0$ et $a + 16b + 81c = 0$.

La résolution du système de ces 3 équations donne $a = b = c = 0$

❹ L'espace G engendré par les fonctions $\{f_1, f_2, f_3\}$ est de dimension 3, de même l'espace H engendré par g_1, g_2 et g_3. L'espace F est donc au maximum de dimension 6.

On a : $G \subset E_p$ et $H \subset E_i$, d'où $\{0\} \subset G \cap H \subset E_p \cap E_i = \{0\}$, donc F est de dimension 6 et $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$ en constitue une base.

❺ D est linéaire car la dérivation est linéaire et toute image par D d'une application de F est encore une combinaison linéaire des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$. D est donc un endomorphisme de F.

Si $f \in Ker\, D$, sa dérivée est nulle et est une combinaison linéaire des vecteurs linéairement indépendants $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$, donc $Ker\, D = \{0\}$ et D est un isomorphisme de F. Comme $Dim \operatorname{Im} D + Dim\, Ker\, D = 6$, on a : $\operatorname{Im} D = F$.

EXERCICE n° 3

❶ La résolution du système $\sum_{k=-1}^{1} a_k = 1, \ \sum_{k=-1}^{1} k a_k = 0$ donne $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1 - 2a_1$.

❷ On vérifie aisément que M_3 est une application linéaire.

❸

$$M_3 f_t = M_3(at+b) = \sum_{k=-1}^{1} a_k (a(t+k)+b) = (at+b)(\sum_{k=-1}^{1} a_k) + a(\sum_{k=-1}^{1} k a_k) = at+b = f_t$$

Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on obtient : $M_3 g_t = \cos \omega t(1-2a_1+2a_1 \cos\omega)$ et cette expression est égale à $\cos\omega t$ si et seulement si $2a_1(\cos\omega - 1) = 0$, soit $\omega = 2k\pi$ et $g_t = 1$

et $M_3(f_t + g_t) = f_t + g_t$

❹ Dans l'expression précédente de $M_3 g_t$, en remplaçant les coefficients par $\frac{1}{3}$, on obtient : $1 + 2\cos\omega = 0$, d'où $\omega = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
Une moyenne arithmétique d'ordre 3 élimine les fonctions périodiques de période 3.

❺ Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on a : $f(a_1) = \sum_{k=-1}^{1} a_k^2 = 6a_1^2 - 4a_1 + 1$
Il s'agit de l'expression d'une parabole strictement convexe et le minimum est donc atteint pour la valeur de a_1 qui annule la dérivée, à savoir :

$$f'(a_1) = 12a_1 - 4 = 0$$

d'où $a_1 = \frac{1}{3}$ et les 2 autres coefficients sont également égaux à $\frac{1}{3}$.

La résolution de ces 3 conditions : $\sum_{k=-1}^{2} a_k = 1, \ \sum_{k=-1}^{2} k a_k = 0, \ \sum_{k=-1}^{2} k^2 a_k = 0$ donne

$a_{-1} = \frac{1}{3}(1-a_0)$, $a_1 = 1 - a_0$, $a_2 = \frac{1}{3}(1-a_0)$. Il reste à minimiser la somme des carrés et le raisonnement est le même que dans le cas précédent. La dérivée de cette somme est égale à : $\frac{1}{9}(20a_0 - 11)$. On obtient pour les coefficients :

$$a_0 = \frac{11}{20},\ a_{-1} = \frac{3}{20},\ a_1 = \frac{9}{20},\ a_2 = -\frac{3}{20},$$

On vérifie que appelle $M_4 h_t = h_t$

EXERCICE n° 4

❶ Pour tout couple $(x,y) \in R^2$, $H(x,y) = \sqrt{2}(x,y)$ et $G(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y, x+y)$.

❷ Soit f la composée de H et de G, on a :

$$f(x,y) = HoG(x,y) = (x-y, x+y).$$

❸ On a : $Ker\ f = \{(0,0)\}$ et f est bijective.

PROBLEME

❶ Comme Ln est défini sur R^{+*}, il est de même pour f.

❷ $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}\left[1 + x^2 + (1-3x^2)Ln\,x\right]$

On vérifie aisément que pour $x^2 = \frac{1}{3}$, la dérivée ne s'annule pas. On en déduit que la dérivée est nulle sur R^{+*} si et seulement si $x \in R^{+*} - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ou $Ln\,x = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$

La fonction g cherchée est donc définie par :

$$\forall x \in R^+ - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$$

Le tracé de la courbe (Γ_1) est classique. Pour tracer (Γ_2), courbe représentative de g, étudions rapidement cette fonction.

$g'(x) = \frac{-8x}{(3x^2-1)^2}$ et $g'(x) < 0$ sur son domaine de définition. La fonction est donc décroissante.

On a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^-} g(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est une asymptote verticale.

Soit h la fonction définie sur $R^{+*} - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ par $h(x) = Ln\,x + \frac{1+x^2}{1-3x^2}$

On a, $h^{'}(x) = \frac{8x^2+(1-3x^2)^2}{x(1-3x^2)^2}$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante (et continue), donc bijective de $\left]0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ sur R et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_1 \in \left]0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ pour lequel $f^{'}(x_1)=0$. De même, h est bijective sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ et il existe un unique $x_2 \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ pour lequel $f^{'}(x_2)=0$.

De plus on remarque que

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < x_2 < 2$$

Puis on calcule $Ln\,x - g(x)$ pour les valeurs suivantes
0.1; 0.2; 0.3; 0.4 et 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9. On obtient

x	0.2	0.3	1.6	1.7
$Ln\,x - g(x)$	-0.427	0.289	-0.063	0.024

On en déduit : $0.2 < x_1 < 0.3$ et $1.6 < x_2 < 1.7$

❸ On vérifie aisément que x_1 et x_2 sont des racines simples de $f^{'}$

D'autre part, on a $f^{'}(1) = \frac{1}{4}$; On a donc

$0 < x < x_1 \Rightarrow f^{'}(x) < 0$
$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f^{'}(x) > 0$
$x_2 < x \Rightarrow f^{'}(x) < 0$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2} \approx \frac{Ln\,x}{x^3}$. Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Pour $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} Ln\,x \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Tableau de variation :

x	0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	‖		$f(x_1)$		0		$f(x_2)$		0

On a $f(1)=0, f(2)=0.055, f(3)=0.033, f(4)=0.019$

❹

$$\int \frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

et

$$\int\frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}$$

On obtient

$$\int\frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}Ln\,x-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 Ln\,x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)$$