ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA) **DEPARTEMENT DE STATISTIQUE** **BP 5084** **DAKAR - SENEGAL**	**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE** **YAOUNDE - CAMEROUN**

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE n° 1

Soit f la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls (R^*) par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

❶ Montrer qu'il existe une fonction numérique continue φ définie sur R et telle que : $\forall x \in R^*, \quad \varphi(x) = f(x)$.

❷ Etudier le sens des variations de φ .

❸ Représenter graphiquement la fonction φ .

❹ Soit g la fonction définie sur R par :

$$g(x) = \frac{1}{x} Ln(\frac{e^x - 1}{x})$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

- Déterminer l'ensemble de définition de g
- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xg(x)}{\varphi(x)-1}$

EXERCICE n° 2

Soit E l'espace des applications numériques continues définies sur R et de période 2π. On note E_p le sous-ensemble de E des applications paires et E_i celui des applications impaires.

❶ Montrer que E est un espace vectoriel réel.

❷ Montrer que $E_p \cap E_i = \{0\}$

❸ Démontrer que les 3 applications f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(t) = \cos t, \quad f_2(t) = \cos 2t, \quad f_3(t) = \cos 3t$$

sont linéairement indépendantes dans E.

❹ Soient g_1, g_2 et g_3 les applications définies par :

$$g_1(t) = \sin t, \quad g_2(t) = \sin 2t, \quad g_3(t) = \sin 3t$$

Donner une base de l'espace vectoriel F engendré par les 6 fonctions $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$

❺ Soit D l'application qui à toute fonction de F fait correspondre sa dérivée. Montrer que D est une application linéaire de F dans F. Déterminer son noyau et son image.

EXERCICE n° 3

❶ Déterminer tous les triplets de nombres réels (a_{-1}, a_0, a_1) qui vérifient les deux équations suivantes :

$$(i) \quad \sum_{k=-1}^{1} a_k = 1, \qquad (ii) \quad \sum_{k=-1}^{1} k a_k = 0$$

❷ Soit X_t une suite de nombres réels, où t est un entier relatif. On considère M_3 l'application qui à X_t fait correspondre $M_3X_t = \sum_{k=-1}^{1} a_k X_{t+k}$, où le triplet (a_{-1}, a_0, a_1) vérifie la condition (i) de la question précédente. Montrer que M_3 est une application linéaire.

❸ Soit f_t la suite définie par $f_t = at + b$, où t est un entier relatif et (a,b) un couple de nombres réels. Calculer $M_3 f_t$.

- Soit g_t la suite définie par $g_t = \cos \omega t$, où t est un entier relatif et ω un nombre réel. Pour quelles valeurs de ω a-t-on $M_3 g_t = g_t$?
- En déduire $M_3(f_t + g_t)$.

❹ Dans cette question uniquement, on pose $a_{-1} = a_0 = a_1 = \frac{1}{3}$. Pour quelles valeurs de ω a-t-on $M_3 g_t = 0$?

❺ Déterminer le triplet (a_{-1}, a_0, a_1) qui minimise l'expression $\sum_{k=-1}^{1} a_k^2$ et qui vérifie la condition (i) de la première question.

- Déterminer le quadruplet (a_{-1}, a_0, a_1, a_2) qui minimise l'expression $\sum_{k=-1}^{2} a_k^2$ et qui vérifie les 3 conditions suivantes :

$$\sum_{k=-1}^{2} a_k = 1, \quad \sum_{k=-1}^{2} k a_k = 0, \quad \sum_{k=-1}^{2} k^2 a_k = 0$$

- On appelle M_4 l'application associée au quadruplet précédent. Calculer $M_4 h_t$, où $h_t = at^2 + bt + c$, avec t entier relatif.

EXERCICE n° 4

Dans le plan R^2, on considère H l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et G la rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

❶ Pour tout couple $(x, y) \in R^2$, expliciter $H(x, y)$ et $G(x, y)$.

❷ Soit f la composée de H et de G, à savoir $f = HoG$. Déterminer $f(x, y)$.

❸ Montrer que f est bijective.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{xLnx}{(x^2+1)^2}$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Déterminer l'ensemble de définition E de f.

❷ Calculer la dérivée $f^{'}$ de f.

- Montrer que la recherche des réels $x \in E$ tels que $f^{'}(x)=0$ se ramène à la recherche des points d'intersection de la courbe représentative (Γ_1) de la fonction Ln et de la courbe représentative (Γ_2) d'une fonction rationnelle g, que l'on déterminera.
- Tracer sur le même graphique les courbes (Γ_1) et (Γ_2).
- Démontrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 de E qui annulent la dérivée de f.
- Donner un encadrement à 10^{-1} près de chacun des réels x_1 et x_2.

❸ Déterminer le sens de variation de f.

- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$
- Tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction f. On précisera les ordonnées des points de (Γ) d'abscisse 1, 2, 3 et 4.

❹ Trouver une primitive de la fonction f.