ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = xLnx - 2x + e$$

où Lnx désigne le logarithme népérien de x et e le nombre de Néper.

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation suivante, où a est un paramètre réel :

$$xLnx - (2+a)x = 0$$

❸ Calculer l'aire limitée par les deux axes et la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE n° 2

Pour deux nombres réels a,b qui vérifient $a<b$, on pose :

$$\varphi_{a,b}(x)=\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+1-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

❶ Pour $x\in[-\pi,\pi]$, montrer que :

- Si $a<x<b$, alors $\varphi_{a,b}(x)>1$
- Si $x\leq a$ ou $x\geq b$, alors $-1\leq \varphi_{a,b}(x)\leq 1$

❷ Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[-\pi,\pi]$.
Montrer qu'il existe un couple (a,b) de nombres réels et un entier naturel n tels que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\neq 0$$

❸ On suppose maintenant que f vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx=0$. Montrer que f est alors la fonction identiquement nulle.

EXERCICE n° 3

❶ Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$ et montrer que : $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Pour toute suite finie de valeurs réelles X_t $(t=1,2,...n)$, trouver le nombre réel a qui minimise l'expression $\sum_{t=1}^{n}(X_t-a)^2$

❸ Trouver les nombres réels a et b qui minimisent l'expression $\sum_{t=1}^{n}(X_t-(at+b))^2$

EXERCICE n° 4

On considère une suite réelle (u_n) dont les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

PROBLEME

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions f_n sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ Donner le tableau de variation de f_n.

❷ Montrer que l'équation $x^n = Ln(1+x)$ admet une unique solution sur l'ensemble des réels strictement positifs, notée α_n. Montrer que $\alpha_n \in]0,1[$

❸ En étudiant le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$, montrer que la suite (α_n) est croissante. Montrer que cette suite est convergente et que sa limite est égale à 1.

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. Montrer que u_n est équivalent à $\dfrac{-Ln(Ln2)}{n}$