AVRIL 2003

ITS

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, car $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$ implique $x = -1 \pm i$

4. La dérivée de $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est égale à $\dfrac{1}{x(1+x^2)} - \dfrac{2x \ln x}{(1+x^2)^2}$

5. La dérivée de $x \cos x$ est égale à $\cos x - x \sin x$

6. $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$

7. $\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

8. $\int_0^1 \dfrac{x-2}{x+1} dx = \int_0^1 (1 - \dfrac{3}{x+1})\, dx = 1 - 3\ln 2$

9. $\lim\limits_{n} (1 + \dfrac{2}{3^n}) = 1$, car $\lim\limits_{n} \dfrac{2}{3^n} = 0$

10. On obtient les valeurs $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$

Exercice n° 2

❶ $Aire = \int_0^1 f(x)\,dx - a = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + ax \right]_0^1 - a = \frac{1}{3}$

❷ On pose $y = (x-1)^2 + a - \ln x$. La dérivée est du signe de $2x^2 - 2x - 1$. La fonction admet un minimum pour $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Elle est décroissante avant cette valeur, puis croissante.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) > 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = 0$ (c'est-à-dire $a = \ln(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) - (\frac{4-2\sqrt{3}}{4})$, l'équation admet une seule solution.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) < 0$, l'équation admet deux solutions.

❸ Le graphe de f et le graphe de la fonction logarithme népérien ont deux points d'intersection d'abscisse 1 et α (que l'on ne cherchera pas à calculer).
L'aire est égale à :

$$\int_1^{\alpha} (\ln x - (x-1)^2)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^{\alpha} = \alpha \ln \alpha - \alpha - \frac{(\alpha-1)^3}{3} + 1$$

Exercice n° 3

❶ La fonction f est strictement croissante sur R.

$$f'(x) = a + be^{bx} > 0$$

❷ Comme f est continue et strictement croissante de R dans R, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution que l'on notera α.

Par ailleurs $f(-n) = -na + e^{-n}$.

Si $a > \frac{1}{e}$, alors $\alpha \in \left]-1, 0\right[$. Et si $\frac{1}{(n-1)e^{n-1}} > a > \frac{1}{ne^{n}}$, alors $\alpha \in \left]-n+1, -n\right[$ $(n > 0)$

❸ $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + \frac{1}{b}e^{bx}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{e^b - 1}{b}$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- $f'(x) = a + be^{bx}$. Cette fonction s'annule pour une certaine valeur $\delta = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$. La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \delta\right[$ et strictement croissante sur $\left]\delta, +\infty\right[$

- Le minimum de f est atteint pour $x = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$ et la valeur du minimum est égale à : $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b}$

- Il faut $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b} < 0$, d'où $a < -be$

Exercice n° 4

❶ Exprimer $Max(u,v) = (u-v)_{+} + v$

❷ $\dfrac{u(t)}{v(t)} = t^2 + 1$, donc $F(t) = Max\left\{2, t^2 + 1\right\}$

F est dérivable sur $R - \{\pm 1\}$. En effet $f_d'(1) = 2 \neq f_g'(1) = 0$

❸ Si $\lambda = 0$, $G(t) = Max\{2,1\} = 2$ et G est dérivable.

Si $\lambda \neq 0$, $e^{\lambda t} = 2$ implique $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$. G est dérivable sur $R - \left\{\dfrac{\ln 2}{\lambda}\right\}$

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

❶ f est une fonction paire, il suffit donc de faire l'étude sur l'ensemble des nombres réels positifs. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La dérivée de f est $f'(x) = 2x\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2}$, expression qui est toujours positive. f est donc strictement croissante sur R^+. Le graphe de f a la forme de celui de la parabole d'équation $y = x^2$, mais avec des branches paraboliques plus verticales.

❷ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2(\ln(1+x^2) - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{e-1}$. Il y a donc deux points d'intersection entre les graphes de f et g.

❸ Le calcul de l'intégrale se fait dans un premier temps par parties.

On pose $u' = x^2$ et $v = \ln(1+x^2)$. On obtient :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3}J$$, où $J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$.

Par ailleurs, $J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg\,x\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$

Par conséquent $I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$

L'aire comprise entre le graphe de f , le graphe de g et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{\pi}{6}$

❹ On a $\int_0^t (f(x) - g(x))\,dx \geq t^2 \int_0^t (\ln(1+x^2) - 1)\,dx$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.