ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 5 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
3. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $x^2 + 2x + 2 = 0$
4. Calculer la dérivée de : $\frac{\ln x}{1 + x^2}$ $(x > 0)$

5. Calculer la dérivée de : $x\cos x$

6. Calculer $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k$

7. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

8. Calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1}dx$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $U_n = 1+\frac{2}{3^n}$

10. Résoudre le système $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases}$

Fomesoutra.com ça soutra !

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = (x-1)^2 + a$$

où a est un paramètre réel.

❶ On suppose que $0 < a < 1$. Calculer l'aire du domaine D suivant :

$$D = \{(x, y) \in R^2 / 0 \le x \le 1,\ a \le y \le f(x)\}$$

❷ Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels strictement positifs, l'équation : $f(x) = \ln x$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

❸ On suppose $a = 0$. Déterminer l'aire comprise entre les points d'intersection du graphe de f et du graphe de la fonction logarithme népérien (en fonction d'un paramètre que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = ax + e^{bx}$$

où a est un paramètre réel non nul et b un réel strictement positif.

❶ Etudier les variations de f dans le cas où $a > 0$.

❷ On suppose toujours $a > 0$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine réelle. Dans quel intervalle de la forme $]n, n+1[$ se situe-t-elle si $b = 1$? (n étant un entier relatif).

❸ Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- Etudier les variations de f
- Résoudre $\underset{x}{Min}\, f(x)$
- Quelle relation doivent vérifier a et b pour que la valeur du minimum soit négative ?

Exercice n° 4

Soient u et v deux fonctions numériques d'une variable réelle indéfiniment dérivables.

❶ Exprimer $Max(u,v)$ en fonction de $(u-v)_+$, où $(u-v)_+$ désigne la partie positive de $(u-v)$ (Si $(u-v) < 0$, alors $(u-v)_+ = 0$).

❷ Pour $t \in R$, on pose :

$$F(t) = Max\left\{2, \frac{u(t)}{v(t)}\right\},$$

où $u(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ et $v(t) = t + 1$. Etudier la dérivabilité de F.

❸ Pour $t \in R$, on pose :

$$G(t) = Max\left\{2, e^{\lambda t}\right\},$$

où λ est un paramètre réel. Etudier la dérivabilité de G en fonction de λ.

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Déterminer le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et celui de la parabole g d'équation $y = x^2$

❸ Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire l'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

❹ On pose $\varphi(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))\,dx$. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t)$.