

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1



1. La dérivée de : $x e^{x^2+3x}$ est $e^{x^2+3x} (1+x(2x+3)) = e^{x^2+3x} (1+3x+2x^2)$
2. On a : $\left| \frac{1-\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \log x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log x - 1) = +\infty$
4. On obtient $e^x = -2$ et $e^x = 1$, d'où une seule solution $x = 0$
5. Une primitive de la fonction f définie par : $f(x) = \log x$ est $F(x) = x \log x - x$
6. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$
7. $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$
8. L'équation correspondante admet deux racines 1 et 4. L'ensemble des solutions est donc $S =]1, 4[$
9. Par récurrence, on obtient $U_n = \frac{U_1}{3^{n-1}}$, et la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
10. Les solutions du système $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$ sont : $(x, y) = (3, 2)$ ou $(-3, -2)$

Exercice n° 2

❶ La fonction f n'est pas définie en 0 et sa dérivée est $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Cette dérivée s'annule en +1. La fonction est décroissante sur $] -\infty, 0[$ de 0 à $-\infty$, décroissante également sur $]0, 1[$ de $+\infty$ à e , puis croissante sur $]1, +\infty[$ de e à $+\infty$. Le graphe de f présente une branche parabolique dans la direction verticale à $+\infty$ et les axes comme asymptotes.

❷ L'équation $1 - \lambda x e^{-x} = 0$ est équivalente à $f(x) = \lambda$ (graphiquement, ceci correspond à l'intersection du graphe de f avec une droite horizontale), d'où les résultats :

- Pour $\lambda < 0$, on a une seule racine,
- Pour $0 \leq \lambda < e$, on n'a pas de racine,
- Pour $\lambda = e$, on a une seule racine,
- Pour $\lambda > e$, on a deux racines.



❸ La fonction g n'est pas définie en -1 et sa dérivée est $g'(x) = \frac{e^x(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}$. Cette dérivée est toujours positive et la fonction est donc strictement croissante sur $] -\infty, -1[$ de 0 à $+\infty$ et sur $] -1, +\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote, ainsi que l'axe horizontal.

❹ L'équation $x - \lambda(x+1)e^{-x} = 0$ est équivalente à $g(x) = \lambda$, d'où les résultats : Pour $\lambda \leq 0$, on a une seule racine et pour $\lambda > 0$, deux racines.

Exercice n° 3

❶ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On trouve les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

La dérivée est égale à $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. La fonction f est donc croissante sur $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et décroissante sinon.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↑ $+\infty$	$+\infty$ ↓ 1	1 ↑ $+\infty$	

② Pour le graphe de f , on a : une a une branche parabolique dans la direction $y = x$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. Le graphe suit le tableau de variation. La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction est convexe.

③

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \ln x + x \right]_1^2 = \frac{5}{2} - \ln 4$$



On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - \ln x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

④ f_m est définie sur R_+^* . Sa dérivée est égale à : $f'_m(x) = m - \frac{1}{x}$ et elle est nulle pour $x = \frac{1}{m}$. f_m est donc décroissante sur l'intervalle $\left] 0, \frac{1}{m} \right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{m}, +\infty \right[$. Elle admet un minimum en $x = \frac{1}{m}$ égal à $\ln m$.

⑤ Pour $m=1$, le minimum est nul, d'où pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $\ln x \leq x - 1$.

⑥ En appliquant ⑤ avec $x = \frac{a_i}{M}$, on obtient : $\ln \frac{a_i}{M} \leq \frac{a_i}{M} - 1$.

En sommant ces différentes inégalités, on a : $\sum_i (\ln a_i - \ln M) \leq \frac{1}{M} \sum_i a_i - n$.

Comme par ailleurs $M = \frac{1}{n} \sum_i a_i$, l'inégalité devient : $\sum_i (\ln a_i - \ln M) \leq 0$ ou encore

$\frac{1}{n} \sum_i \ln a_i \leq \ln M$ et $\sum_i \ln a_i^{1/n} = \ln G \leq \ln M$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on obtient $G \leq M$

⑦ On remplace a_i par $\frac{1}{a_i}$ dans $G \leq M$ pour obtenir :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}, \text{ c'est à dire } \frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}, \text{ d'où } H \leq G$$

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \text{ et } f(0) = 0$$

❶ f est dérivable, et donc continue, sur $\mathbb{R} - \{0\}$ comme composée de fonctions élémentaires dérivables.

f est continue en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, en effet $\left| x \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$.

Pour la dérivabilité en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ et cette dernière limite n'existe pas, la fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

❷ Résolvons les différentes équations :

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\sin \frac{\pi}{x} = \sin k\pi$, d'où $S = \{x / f(x) = 0\} = \left\{0, \frac{1}{k} (k \in \mathbb{Z})\right\}$

b) $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $\sin \frac{\pi}{x} = 1 = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, d'où $S = \{x / f(x) = x\} = \left\{0, \frac{2}{1+4k} (k \in \mathbb{Z})\right\}$

c) $f(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$ ou $\sin \frac{\pi}{x} = -1 = \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, d'où

$$S = \{x / f(x) = -x\} = \left\{0, \frac{2}{4k-1} (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

 Fomesoutra.com
ça soutra !

❸ Calculons les dérivées :

$$f'(x) = \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi}{x^3} \sin \frac{\pi}{x}$$

❹ Variations de f pour $x \geq \frac{1}{2}$. Comme $x \geq \frac{1}{2}$, on a : $0 \leq \frac{\pi}{x} \leq 2\pi$.

La dérivée seconde s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Elle est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

donc la dérivée première est croissante sur cet intervalle et comme elle change de signe sur cet intervalle en étant bijective, elle s'annule une seule fois sur cet intervalle en une valeur notée α . En cette valeur la fonction admet un minimum.

x	1/2	α	1	$+\infty$
$f''(x)$	0	+	0	- 0
$f'(x)$	-2π	$\uparrow$	π	$\downarrow$ 0
$f(x)$	0	$\downarrow$	$\uparrow$ 0	0 $\uparrow$ $+\infty$

Exercice n° 5

a) Pour $f(x) = ax$, on a : $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$. Cette fonction admet un minimum pour la valeur de a qui annule la dérivée de cette fonction L par rapport à a .

On obtient : $2a(\sum_{i=1}^n x_i^2) - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, d'où $a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$

b) Pour $f(x) = ax^2$, $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2)^2 + 2a\lambda$. En dérivant par rapport à a , on obtient :

$2a(\sum_{i=1}^n x_i^4) - 2\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2\lambda = 0$, d'où $a = \frac{\sum_i x_i^2 y_i - \lambda}{\sum_i x_i^4}$



c) Pour $f(x) = ax^2 + bx$, $L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i)^2 + 2a\lambda$. On dérive par rapport à a et par rapport à b .

$L'_a = 2a(\sum_{i=1}^n x_i^4) + 2b(\sum_i x_i^3) - 2\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2\lambda = 0$ et

$L'_b = 2a(\sum_{i=1}^n x_i^3) + 2b(\sum_i x_i^2) = 0$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(\sum_i x_i^4) + b(\sum_i x_i^3) = \sum_i x_i^2 y_i - \lambda \\ a(\sum_i x_i^3) + b(\sum_i x_i^2) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne, en posant $\Delta = (\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i^3)^2$:

$$a = \frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i x_i^2 y_i - \lambda)}{\Delta} \quad \text{et} \quad b = -\frac{(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i^2 y_i - \lambda)}{\Delta}$$

