ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de : $x\,e^{x^2+3x}$
2. Calculer $\underset{x \to +\infty}{Lim} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. Calculer $\underset{x \to +\infty}{Lim} (x\,Log\,x - x)$
4. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$
5. Donner une primitive de la fonction f définie par : $f(x) = Log\,x$
6. Calculer en fonction de n, l'expression suivante : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$
7. Calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

8. Résoudre $x^2 - 5x + 4 < 0$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in N^*}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$ et $U_1 = 1$

10. Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$

Exercice n° 2

❶ Etudier la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et tracer son graphe.

❷ Déterminer le nombre de racines de l'équation : $1 - \lambda x e^{-x} = 0$, où $\lambda \in R$.

❸ Etudier et représenter la fonction réelle g définie par : $g(x) = \dfrac{x e^x}{x+1}$

❹ Déterminer le nombre de racines de l'équation : $x - \lambda (x+1) e^{-x} = 0$, où $\lambda \in R$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x - Ln\,|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Etudier les variations de f.

❷ Tracer le graphe de f.

❸ Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et le graphe de f.

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

❹ Etudier les variations de f_m.

❺ Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\, x \leq x-1$.

❻ On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note *M* la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$. Démontrer que $G \leq M$ (on pourra appliquer ❺ avec $x = \frac{a_i}{M}$).

❼ Comparer G et H.

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \text{ et } f(0) = 0$$

❶ Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

❷ Préciser l'ensemble des nombres réels tels que :

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$.

❸ Calculer les dérivées première et seconde de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

❹ Etudier les variations de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

Exercice n° 5

On considère n couples fixés (x_i, y_i) de valeurs réelles strictement positives et λ un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer les paramètres *a* et/ou *b* d'une fonction f qui minimise l'expression suivante :

$$L(f, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^1 f''(x)\, dx$$

dans chacun des cas ci-dessous :

a) $f(x) = ax$
b) $f(x) = ax^2$
c) $f(x) = ax^2 + bx$