AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\mathrm{F(x)} = \dfrac{5}{6}\mathrm{x}\sqrt[5]{\mathrm{x}} + constante$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\mathrm{dx} = \left[Ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}})\right]_0^1 = Ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

3 .L'équation de la droite est $\mathrm{y} = -2\mathrm{x} + 3$

4. On pose $u = Ln\,x$ et on obtient alors l'équation $u^2 - u - 6 = 0$, d'où $u = 3 = Ln\,x$ et $u = -2 = Ln\,x$. En conclusion : $\mathrm{x} = \mathrm{e}^3$ ou $\mathrm{x} = \mathrm{e}^{-2}$

5. La dérivée de $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}+1}}{\mathrm{x}^2+1}$ est $\mathrm{f'(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}+1}(1-\mathrm{x})^2}{(\mathrm{x}^2+1)^2}$

6. Les réels *a*, *b*, *c* doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 9a+3b+c=-2 \\ 16a+4b+c=-3/2 \end{cases}$$

On obtient : $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}$

7. Soit x = 2,3535353535…., alors 100x =235,353535…et par différence 99x=233, d'où x est égal à la fraction 233/99

8. On a : $\dfrac{x^2-1}{x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)} < 0$ si et seulement si $x < -1$ ou $1 < x < 2$

9. On vérifie par récurrence que : $U_n = \dfrac{1}{3^{2^{n-1}}}$ et la limite est donc nulle.

10. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3Lnx-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(-1+\frac{3Lnx}{x})} = 0$, car $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$ et $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Exercice n° 2

∂ Par identification des polynômes, on obtient $a=b=c=1$ et $f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x^2-1}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

÷ On a $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ qui tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $+\infty$

La courbe représentative de f est au dessus de P.

≠ La dérivée de f est $f'(x)=2x\left(1-\dfrac{1}{(x^2-1)^2}\right)=\dfrac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

Tableau de variation :

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\downarrow$	4	$\uparrow$	$+\infty$

≡ Le graphe de f admet une asymptôte verticale en x = 1 et une branche parabolique dans la direction *oy* en $+\infty$

Exercice n° 3

∂ On applique le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme sur l'intervalle $[Ln\, p, Ln(p+1)]$, d'où il existe un réel *c* de cet intervalle tel que :

$$Ln(p+1)-Ln(p)=f'(c)=\frac{1}{c}$$

On a : $\frac{1}{p+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{p}$, d'où $\frac{1}{p+1} < Ln(p+1) - Ln(p) < \frac{1}{p}$

- Par sommation : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} < \sum_{p=1}^{n} (Ln(p+1) - Ln(p)) < \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

Soit $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, l'inégalité précédente devient $u_n + \frac{1}{n+1} - 1 < Ln(n+1) < u_n$. La suite (u_n) étant minorée par la suite divergente de terme général $(Ln(n+1))$, elle est divergente et équivalente à $Ln(n+1)$.

Exercice n° 4

∂ La fonction f définie par : $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}$ est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude pour des valeurs positives. Sa dérivée est égale à : $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}$ qui est toujours positive, la fonction est donc strictement croissante sur R^+ et donc aussi bijective (car continue) sur cet ensemble. Elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

- Soit $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On pose $t = e^x$, l'équation devient $t^2 - 2ty - 1 = 0$, d'où $t = y + \sqrt{y^2+1}$ et $f^{-1}(y) = Ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

÷ Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice.

≠ On vérifie facilement que $f^2 = (f')^2 - 1$.

≡ on a : $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Cette fonction a des valeurs comprises entre –1 et 1 et elle est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine et les droites horizontales d'équation x = 1 et x = -1 sont des asymptôtes.

Exercice n° 5

∂ $\text{Prob}(L/G) = 0{,}01$ et $\text{Prob}(L/F) = 0{,}02$

- $\text{Prob}\,(G \cap L) = \Pr ob\,(G) \cap \Pr ob\,(L) = 0{,}52 \times 0{,}01 =$ 0,0052
  $\text{Prob}\,(F \cap L) = \Pr ob\,(F) \cap \Pr ob\,(L) = 0{,}48 \times 0{,}02 =$ 0,0096
  Par ailleurs $L = (G \cap L) \cup (F \cap L)$, d'où $\text{Prob}\, L = 0{,}0052 + 0{,}0096 = 0{,}0148$

÷ La probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille est égale à 2/3

≠ Pour 20 naissances en moyenne par semaine.

- La probabilité qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche est égale à $(1 - 0{,}052) + (1 - 0{,}096) = 0{,}9852$
- La probabilité qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation est égale à $1 - 0{,}9852 = 0{,}0148$ (la valeur 20 n'intervient pas).

Exercice n° 6

On montre que f est constante. Soit $t \in [a,b]$. Pour *s* suffisamment petit, il existe un $u(s)$ dans $[t-s, t+s]$ tel que $\text{f}(\text{u(s)}) = \text{f(a)}$ *ou* f(b).

On a alors par continuité
$(\text{s} \to 0) \Rightarrow (\text{u(s)} \to \text{t}) \Rightarrow (\text{f(u(s))} \to \text{f(t)}) \Rightarrow (\text{f(t)} \to \text{f(a)}\ ou\ \text{f(b)})$

L'image de $[a,b]$ par f est $f(a)$ ou $f(b)$ avec au maximum deux éléments. Mais f est continue donc l'image de $[a,b]$ est un intervalle fermé $[m,M]$. Il faut alors $m = M$ (sinon on a plus de deux éléments) et donc $f(x) = \text{Constante} = f(a) = f(b)$.