ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer une primitive de $\sqrt[5]{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$
2. Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$
3. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et B(2,-1).
4. Résoudre l'équation : $(Ln\,x)^2 - Ln\,x - 6 = 0$, où Ln désigne le logarithme népérien.
5. Calculer la dérivée de $f(x)=\frac{e^{x+1}}{x^2+1}$
6. Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ vérifie $P(1)=0,\quad P(3)=-2 \quad \text{et} \quad P(4)=-\frac{3}{2}$
7. Ecrire le nombre suivant 2,3535353535…., dont le développement décimal est infini et périodique, sous la forme d'une fraction.

8. Résoudre l'inéquation $\frac{x^2-1}{x-2} < 0$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par récurrence par : $U_{n+1} = (U_n)^2$ et $U_1 = \frac{1}{3}$

10. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x^3}{e^x}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$

❶ Trouver des nombres réels *a*, *b*, *c* tels que $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x^2-1}$

❷ Etudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.

❸ Soit P la courbe représentative de la fonction *g* définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x) = x^2+1$

- Quelle est la limite de $f(x)-g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
- Etudier la position de la courbe représentative de f par rapport à P.

❹ Calculer la dérivée de f et étudier ses variations.

❺ Tracer le graphe de f et la courbe P.

Exercice n° 3

❶ Montrer que pour tout entier n>0, on a : $\frac{1}{n+1} < Ln(n+1) - Ln(n) < \frac{1}{n}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

❷ En déduire la nature de la suite $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et trouver un équivalent simple de cette suite.

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque notée f^{-1}.

❸ Tracer le graphe de f^{-1}.

❹ Exprimer le carré de f en fonction du carré de sa dérivée.

❺ Etudier les variations de la fonction $h = \frac{f}{f'}$ et tracer son graphe.

Exercice n° 5

Dans une population la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52.

On sait d'autre part que 2% des filles et 1% des garçons présentent à la naissance une luxation congénitale de la hanche.

On considère les événements suivants :

G : naissance d'un garçon

F : naissance d'une fille

L : le nouveau-né souffre d'une luxation de la hanche.

❶ Déterminer les probabilités de « L sachant G » (notation L/G) et de « L sachant F » (notation L/F).

❷ Calculer les probabilités des événements « G et L » et « F et L ». En déduire la probabilité de L.

❸ Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

❹ Dans une maternité il naît en moyenne 20 enfants par semaine.

- Quelle est la probabilité qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation ?

EXERCICE n° 6

Soit f une fonction continue, définie de l'intervalle $[a,b]$ sur R. On suppose que pour tous *c* et *d* de cet intervalle, il existe *e* compris entre *c* et *d* tel que $f(e) = f(a)$ ou $f(e) = f(b)$

Montrer que $f(a) = f(b)$