AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice° 1

1. On obtient pour la dérivée de f

$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}-Log(1+x^2)\right)}{e^{2x^2}}=\frac{2x\left(\frac{1}{1+x^2}-Log(1+x^2)\right)}{e^{x^2}}$$

2. $F(x)=-\frac{1}{x}+x+xe^x-e^x$

3. $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)=0$, d'où $x=0, x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

4. $I=\int_0^1 x\,Log(1+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du$ en posant $u=1+x^2$.

   et $I=\frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\,Log(u)-u\right]_1^2=Log2-\frac{1}{2}$

5. Le diamètre du cercle doit être égal à la longueur du côté du carré. La surface S du cercle est égale à $S=\pi R^2=9$, donc le rayon est $R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ et la longueur du côté du carré vaut $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

6. On a $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=\frac{49}{4}$, d'où le système : $\begin{cases} x+y=\pm\frac{7}{2} \\ xy=\frac{3}{2}\end{cases}$

   Il reste à résoudre l'équation : $x^2-(\pm\frac{7}{2})x+\frac{3}{2}=0.$

   On obtient $(x,y)=\left\{(3,\frac{1}{2}),(-3,-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},3),(-\frac{1}{2},-3)\right\}$

7. La suite $(U_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$.

   Si $|a|<1,$ la série est divergente. Si $|a|>1,$ la série est convergente. Pour $a=-1,$ la série est alternée et pour $a=1,$ la série converge vers U_0.

8. Pour le premier élément de E_3, il y a 4 possibilités, puis 3 possibilités pour le deuxième et enfin 2 possibilités pour le dernier. Le nombre d'applications injectives différentes de E_3 dans E_4 est égal à 24.

9. Les réels *a*, *b*, *c* et *d* doivent vérifier les équations suivantes :
Pour A(0, -3) : $-3 = \dfrac{b}{d}$ et pour les deux asymptotes : $\dfrac{a}{c} = 2$ et $-\dfrac{d}{c} = 1$.
On obtient $b = -3d$, $c = -d$, $a = -2d$, d'où la fonction $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

10. On a $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < \dfrac{1}{|x|}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Exercice° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+1}$

1. On a : $f(x) = \dfrac{x(x+1)+2}{x+1} = x + \dfrac{2}{x+1}$

2. La dérivée de f est égale à

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x+1)^2}$$

La fonction est croissante à l'extérieur des racines du numérateur de sa dérivée et décroissante entre ces racines. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale et la droite d'équation $y = x$ une asymptote oblique. Le graphe de f passe par les points de coordonnées (0, 2) et (-2, -4).

3. D'après le graphe, on pose $X = x+1$ et $Y = y+1$, d'où $Y = X + \dfrac{2}{X}$ est une fonction impaire et la fonction f admet le point A(-1, -1) comme point de symétrie.

4. L'aire comprise entre le graphe de f, la première bissectrice et les droites $x = 0, x = 1$ est égale à $\int_0^1 (f(x) - x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{2}{x+1}\,dx = \left[2\,Log(x+1)\right]_0^1 = Log 4$

5. Le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est déterminé par la résolution de l'équation $x + \frac{2}{x+1} = \alpha x + \beta$.

Cette équation s'écrit sous forme d'une équation du second degré : $x^2(\alpha - 1) + x(\alpha + \beta - 1) + \beta - 2 = 0$.

On obtient pour discriminant : $\Delta = \alpha^2 + 2\alpha(3-\beta) + (\beta^2 + 2\beta - 7)$ et pour discriminant de cette expression : $\delta' = 8(2-\beta)$ En conclusion :

1. Si $\beta > 2$, alors $\Delta > 0$ et on a deux solutions.
2. Si $\beta = 2$, alors $\Delta = (\alpha+1)^2$. Si $\alpha = -1$, on a une solution et pour $\alpha \neq -1$, on a 2 solutions.
3. Si $\beta < 2$, alors $\delta' > 0$ et Δ change de signe selon la position de α par rapport aux racines de Δ, à savoir $\alpha_1 = -(3-\beta) - \sqrt{8(2-\beta)}$ et $\alpha_2 = -(3-\beta) + \sqrt{8(2-\beta)}$.

   Si $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$, on a deux solutions. Si $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$, une seule solution et pour $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, aucune solution.

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)e^{x^2}$

1. La dérivée de f est égale à $f'(x) = e^{x^2}(2x^2 + 2x + 1)$ qui est toujours strictement positive, donc f est strictement croissante et elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

2. La dérivée seconde de f est égale à $f''(x) = e^{x^2}(2x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$ et elle est du signe de $z = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Cette dernière fonction est strictement croissante. On vérifie que $z(0) = 1$ et $z(-1) = -2$. Comme cette fonction est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur β, telle que $\beta \in]-1,0[$ et $f''(\beta) = 0$. La fonction f est convexe pour $x > \beta$ et concave sinon.

3. L'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de la fonction g définie par $g(x) = e^{x^2}$ et les droites $x = 0, x = 1$ est égale à : $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in Q\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels (densité de Q et $R-Q$ dans R).

1. Pour tout $x_0 \in Q$, il existe donc une suite $x_n \in R-Q$ qui converge vers x_0. On a $f(x_n)=0$ et $f(x_0)=1$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0. De même, pour $x_0 \in R-Q$, il existe donc une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0. On a : $f(x_n)=1$ et $f(x_0)=0$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0.
Cette fonction est discontinue en tout point.

2. Comme précédemment, la fonction g est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½.

Pour une suite x_n quelconque qui converge vers ½, on a : $g(x_n)=0$ ou $g(x_n)=(x_n-\frac{1}{2})$ et dans tous les cas la suite $g(x_n)$ converge vers $g(\frac{1}{2})=0$ quand x_n tend vers ½, donc g est continue en ½.

Etudions la dérivabilité de g en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{g(x)-g(1/2)}{x-1/2}=\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$. L'étude de la dérivabilité de g revient à l'étude de la continuité de f, donc g n'est pas dérivable en ½.

3. Comme précédemment, la fonction h est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½. La fonction h est continue en ½ comme composée de deux fonctions continues (g et $(x-\frac{1}{2})$).

Etudions la dérivabilité de h en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{h(x)-h(1/2)}{x-1/2}=\lim\limits_{x\to 1/2} g(x)=g(1/2)=0$, donc h est dérivable en ½.

Exercicen° 5

1. La moyenne $\overline{x}$ des salaires est égale à $\overline{x} = \dfrac{n_H \overline{x_H} + n_F \overline{x_F}}{n}$. Pour l'application numérique, on trouve : $\overline{x} = 1300$

2. $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 + \dfrac{1}{n}\sum_{i\in F}(x_i - \overline{x})^2$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H} + \overline{x_H} - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})^2 + \sum_{i\in H}(\overline{x_H} - \overline{x})^2 + 2\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})(\overline{x_H} - \overline{x})\Big)$$

Par ailleurs, $\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H}) = 0$, d'où $\dfrac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x})^2 = \dfrac{n_H}{n}V_H(x) + \dfrac{n_H}{n}(\overline{x_H} - \overline{x})^2$

En conclusion : $V(X) = \dfrac{n_H V_H(X) + n_F V_F(X)}{n} + \dfrac{n_H(\overline{x_H} - \overline{x})^2 + n_F(\overline{x_F} - \overline{x})^2}{n}$

Pour l'application numérique, on trouve $V(X) = 40\,000$

Exercice n° 6

1. La somme de deux fonctions convexes est convexe (évident).

2. La norme est une application convexe (propriétés de la norme).

3. Soit $g(u_i) = u_i \, Log(u_i)$, sa dérivée seconde est égale à $\dfrac{1}{u_i}$, la fonction g est donc convexe et f est convexe comme somme de fonctions convexes.

4. Par exemple la fonction linéaire $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est convexe et n'admet pas de minimum.

5. Par hypothèse sur la limite :

$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall u \in R^n, \|u\| \geq B \Rightarrow f(u) > A$, donc $\underset{R^n}{Min}\, f = \underset{\{u / \|u\| \leq B\}}{Min}\, f$. Comme f est une fonction continue sur cet ensemble fermé borné $\{u \in R^n \,/\, \|u\| \leq B\}$, elle admet un minimum (et un maximum) sur cet ensemble et donc sur R^n.