ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice sera éliminatoire. Les questions de l'exercice sont indépendantes, chacune étant notée sur 1 point.

Globalement l'exercice n° 1 n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de l'épreuve.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{Log(1+x^2)}{e^{x^2}}$
2. Trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^2}+1+xe^x$
3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $x^3+x^2+x=0$
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,Log(1+x^2)\,dx$
5. Trouver la longueur du côté du plus petit carré dans lequel on peut inscrire un cercle de surface égale à 9.
6. Résoudre le système : $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{37}{4} \\ xy=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

7. Trouver la limite, si elle existe, de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par récurrence par $U_{n+1} = \frac{1}{a}U_n$ et U_0 est un nombre réel non nul, ainsi que *a*.

8. On note E_n un ensemble à *n* éléments. Quel est le nombre d'applications injectives différentes de E_3 dans E_4 ?

9. Calculer les valeurs de *a*, *b*, *c* et *d* de façon que la fonction homographique f définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ passe par le point A(0, -3) et admette les droites $x = 1$ et $y = 2$ comme asymptotes.

10. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+1}$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels *a*, *b*, *c* tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.

4. Calculer l'aire comprise entre le graphe de f, la première bissectrice et les droites $x = 0, x = 1$.

5. Déterminer selon les valeurs de α et β, le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de f .

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de la fonction g définie par $g(x) = e^{x^2}$ et les droites $x = 0, x = 1$.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$.

2. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = (x - \frac{1}{2})f(x)$

Etudier la continuité et la dérivabilité de g .

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = (x - \frac{1}{2})^2 f(x)$

Etudier la continuité et la dérivabilité de h .

Exercice n° 5

Dans une entreprise, on note $\overline{x_H}$ (respectivement $\overline{x_F}$) la moyenne des salaires de hommes (respectivement des femmes). On désigne par *n* l'effectif total des salariés, par n_H (resp. n_F) le nombre d'hommes (resp. de femmes) dans l'entreprise.

1. Exprimer la moyenne $\overline{x}$ des salaires dans l'entreprise en fonction de la moyenne des salaires des hommes et des femmes.

Application numérique : calculer $\overline{x}$ pour $n_H = 50,\ n_F = 100,\ \overline{x_H} = 1500,\ \overline{x_F} = 1200$.

2. La dispersion des salaires (on note X la variable salaire) est mesurée par la variance définie par $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, où x_i correspond au salaire de l'employé i . On définit par le même principe la variance $V_H(X)$ (resp. $V_F(X)$) des salaires des hommes (resp. des femmes).

Exprimer $V(X)$ en fonction de $V_H(X)$ et $V_F(X)$.

Application numérique : calculer $V(X)$ pour $V_H(X) = 40000$, $V_F(X) = 10000$ et les valeurs données dans la question précédente.

Exercice n° 6

On considère l'ensemble des fonctions numériques f définies sur R^n. On rappelle que f est convexe si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in R^n \times R^n, \forall t \in [0,1], f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

1. Montrer que la somme de deux fonctions convexes est convexe.

2. Montrer que la norme est une application convexe.

3. Montrer que f définie par $f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, Log(u_i)$ est convexe sur $(R^{+*})^n$.

4. Toute fonction convexe sur R^n admet-elle un minimum ?

5. On suppose que f est continue et que $\lim_{\|u\| \to +\infty} f(u) = +\infty$ Montrer que f admet un minimum sur R^n.