AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{-2\sin x\cos x}{1+x^2}+\dfrac{(1-x^2)\cos^2 x}{(1+x^2)^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx=1-\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx=1-Ln(\frac{1+e}{2})$, en posant $u=e^x$

3. Une primitive de $\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ est $3\sqrt{1+x^2}$

4. Par soustraction des deux lignes, on obtient $y=Ln2$, puis $x=3Ln2$:

5. On obtient $f^{'}(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x=-2+\sqrt{3}$ sur l'intervalle $]-2,+\infty[$ et on vérifie que la fonction admet un minimum en ce point, à savoir $f(-2+\sqrt{3})=2\sqrt{3-3}$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\leq 0$ est $]-\infty,-\sqrt{2}]\cup]1,\sqrt{2}]$

7. L'équation de la droite est $y=2x-3$

8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1+x-e^{-x/2})=-\infty$ (la convergence de l'exponentielle est plus rapide que celle de x).

9. La moyenne de la classe est : $12\times\dfrac{2}{3}+10{,}2\times\dfrac{1}{3}=11{,}4$

10. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{3}{4}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 = f(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ sur R^+ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$; Son graphe admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptôte horizontale (et $y=-1$, comme f est impaire).

3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x})\,dx = 1 - Ln2$ et $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$ (car f est impaire)

Exercice n° 3

Docs à portée de main

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} > 0$ et f est strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur R^+, avec une branche parabolique dans la direction oy.

2. $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{-1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Pour tout n, $u_n > 0$ et on vérifie par récurrence (comme f est croissante) ; que $u_n < 1$ et $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est donc croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = f(l)$, d'où $l = 1$.

Exercice n° 4

1. On a $f'(x) = \frac{-2x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Le numérateur est toujours négatif. La fonction f est donc strictement décroissante de $]0,1[$ dans R.

2. Le graphe de f est symétrique par rapport au point $A(1/2,0)$, en effet si on pose $X = x - 1/2$, on obtient $\tilde{f}(X) = \frac{2X}{X^2 - 1/4}$ qui est impaire.

3. Une primitive de f sur $]0,1[$ est $F(x) = Ln\, x(1-x)$.

4. L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$ est égale à : $-Ln\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + Ln\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3}) = Ln\frac{9}{8}$.

5. On obtient $G(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + k$ et avec $G(\frac{1}{2}) = 6$, $k = 2$.

Exercice n° 5

1. Pour $x \in [0, \pi/2]$, $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(n\sin x + x\cos x)$ et $f_n^{'}$ est du signe de $z_n = n\sin x + x\cos x$ $\quad z_n^{'} = x\cos x\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$ et $z_n^{'}$ est du signe de $\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$.
D'après les graphes de ces deux fonctions : $\frac{n+1}{x}$ et $tg(x)$, il existe une unique valeur $x_0 \in]0, \pi/2[$ telle que $\frac{n+1}{x_0} = tg(x_0)$. Les fonctions z_n sont donc croissantes de $[0, x_0]$ et décroissantes sur $[x_0, \pi/2]$, mais elles sont toujours positives.

Les fonctions f_n sont donc croissantes de $[0, \pi/2]$ sur $[0, (\pi/2)^n]$.

2. trouve $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} x\sin x\, dx = 1$.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = \left[-x^n\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} nx^{n-1}\cos x\, dx = n\left(\left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-2}\sin x\, dx\right)$$

d'où $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

3. On obtient $u_n(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})\sin x$

Pour $x = 1$, $u_n(1) = n\sin 1$ et cette suite tend vers $+\infty$

Pour $x \neq 1$, $u_n(x) = (\frac{1-x^n}{1-x})\sin x$.

Pour $|x| < 1$, la suite $u_n(x)$ converge vers $u(x) = \frac{\sin x}{1-x}$

Pour $|x| > 1$, la suite $u_n(x)$ est divergente.

On étudie $u(x)$ pour $|x| < 1$. Sa dérivée est : $u^{'}(x) = \frac{(1-x)\cos x + \sin x}{(1-x)^2}$ qui est du signe du numérateur et positive. La fonction $u(x)$ est croissante sur cet intervalle avec une asymptote verticale en $x = 1$ (on pouvait plus rapidement remarquer que $\sin x$ est croissant sur l'intervalle $]-1,1[$ et le dénominateur décroissant).

Exercice n° 6

Soit

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \text{ , où } c_k \in Z^*$$

1. On vérifie aisément que $0 < x(1-x) < 1/4$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$, d'où $0 < f(x) < \dfrac{1}{4^n n!} < \dfrac{1}{n!}$. La second assertion est triviale.

2. La dérivée $m-ième$ est $f^{(m)}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} c_k\, k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}$ si $m \le n$, d'où $f^{(m)}(0) = 0$ si $m < n$ ou $m > 2n$, $f^{(m)}(0) = \dfrac{m!}{n!}c_m$ si $n \le m \le 2n$.

Dans les deux cas, $f^{(m)}(0)$ est un entier relatif. Il suffit de dériver *m* fois l'égalité $f(1-x) = f(x)$

pour obtenir $(-1)^m f^{(m)}(1-x) = f^m(x)$, d'où $f^{(m)}(1) = (-1)^m f^m(0)$ qui est un entier relatif.

3. On suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in N^2$. Soit

$$G(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

a) $G(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k b^k a^{n-k} f^{(2k)}(0) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(0)$ est un entier relatif puisque les $f^{(2k)}(0)$ le sont. Le raisonnement est identique pour $G(1)$.

b) $\dfrac{d}{dx}(G^{'}(x)\sin \pi x - \pi\, G(x)\cos \pi x) = G^{''}(x)\sin \pi x + \pi^2 G(x)\sin \pi x = \pi^2 A \sin \pi x$

où

$$A(x) = \frac{1}{\pi^2}G^{''}(x) + G(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k-2} f^{(2k+2)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

$$A(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2(k+1)} f^{(2(k+1))}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

$$A(x) = b^n \sum_{u=1}^{n+1} (-1)^{u-1} \pi^{2n-2u} f^{(2u)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

$$A(x) = b^n (-1)^n \pi^{-2} f^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n} f(x) = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n f(x) = a^n f(x)$$, d'où

l'égalité demandée.

c) On en déduit que $I = \pi \int_0^1 a^n \sin \pi x \times f(x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi} G'(x) \sin \pi x - G(x) \cos \pi x \right]_0^1 = G(0) + G(1)$ et I sera un entier relatif.

d) L'encadrement obtenu à la première question pour $x \in \left]0,1\right[$ implique $0 < I < \frac{2a^n}{n!}$, de sorte que $0 < I < \frac{2a^n}{n!} < 1$ pour n assez grand. Ceci est absurde puisque I est un entier relatif. Ainsi, l'hypothèse de départ, que π^2 est rationnel, est fausse. De même π n'est pas rationnel sinon π^2 le serait.

Exercice n° 7

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \overline{V})P(V)}{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap V)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(M)P(V)}{P_M(V)P(M)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(V)}{P_M(V)P(\overline{V})} = \frac{(1-P_M(V))P(V)}{P_M(V)(1-P(V))}$$

Pour le vaccin A : $\lambda = \frac{(1-0{,}008)\times 0{,}25}{0{,}008 \times (1-0{,}25)} \approx 41{,}33$

Pour le vaccin B : $\lambda = \frac{(1-0{,}006)\times 0{,}2}{0{,}006 \times (1-0{,}2)} \approx 41{,}42$

Les deux vaccins ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises.