INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{e^x \sin x}{1+e^x}$

2. Calculer $\int_0^3 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

3. Michel a trois ans de plus que Paul et 7 ans de plus que Pierre. A eux trois, ils ont 101 ans. Quel est l'âge de Pierre ?

4. Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

5. Soit la fonction f définie par $f(x)=x^6+x^4+x^2+1$. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions ?

6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{e}$ et $u_0=1$. Quelle est la limite de cette suite ?

7. Entre janvier 2004 et janvier 2007, votre salaire a augmenté de 40% alors que dans cette même période les prix à la consommation ont augmenté de 25%. Quelle est la variation du pouvoir d'achat de votre salaire durant cette période ?

8. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} x^k \, dx$

9. Dans un concours d'entrée à une école de statistique, trois pays (A, B, C) présentent des candidats. Le tableau suivant donne la moyenne des candidats selon les pays :

Pays	A	B	C
Moyenne	10	8	12

Sachant que 3/5 des candidats sont originaires du pays A, 3/10 du pays B et 1/10 du pays C, quelle est la moyenne de l'ensemble de ces candidats ?

10. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})$, où $\bar{x}$ correspond à la moyenne arithmétique des $(x_k),\ k = 1,\dots,n$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de f .

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2(x-1)g(x)$$

où $g(x)$ est la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est un nombre rationnel} \\ 0 \text{ si } x \text{ est un nombre irrationnel} \end{cases}$$

1. Montrer que tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels.

2. Etudier la continuité de g sur R.

3. Etudier la continuité de f sur R.

4. Etudier la dérivabilité de f sur R.

Exercice n° 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) est convergente, quelle est alors sa limite ?

3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction numérique f définie, sur R^+, par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe O*x*, le graphe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice n° 5

Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \text{, puis } \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

1. Montrer que $u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{x+p}dx$

2. Montrer que la suite γ_n est convergente.

Exercice n° 6

1. Comparer les deux fonctions $f(x) = Ln(x+e)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$ sur l'ensemble des réels positifs.

2. Calculer $I_n = \int_0^n (\sqrt{x+1} - Ln(x+e))dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3. Dans une course à pied de 10 kilomètres, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête se trouvent sur une même ligne. Si x désigne la distance restante a parcourir, la probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et pour le coureur B à $\frac{1}{g(x)}$.

Cet énoncé a-t-il un sens? et qui a le plus de chances de gagner la course ?

Exercice n° 7

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive et strictement inférieure à 1, de (E_n) , notée x_n.

2. Calculer la limite de la suite (x_n) quand n tend vers $+\infty$.