AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée est égale à $f^{'}(x) = 2xe^{x^2}\,Ln(1+x) + \dfrac{e^{x^2}}{1+x}$ et $f^{'}(0) = 1$.

2. Il faut que la dérivée seconde soit nulle pour obtenir un point d'inflexion et qu'elle change de signe :

   $f^{''}(x) = 6x \;\; - 6 = 0$, d'où $x = 1$.

3. $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$, d'où $x = 1$ car $(x^2 + x + 2) \neq 0$.

4. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4 = 0$, d'où $x = 1$ avec une multiplicité d'ordre 4.

5. $I = Ln4 - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = Ln4 - \left[xLn(1+x)\right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}dx = Ln2 + \left[x - Ln(1+x)\right]_0^1 = 1$.

6. $\underset{n \leftarrow \infty}{Lim}\, S_n = -1 + \underset{n \to \infty}{Lim} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = -1 + 2 = 1$.

7. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ est définie par :

   $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, soit ici 7/3.

8. Si i désigne le taux d'inflation de février, on doit avoir :

   $(1 + 0{,}008)(1+i) = 1{,}01808$, soit $i = 1\%$.

9. Par combinaison des deux lignes, on obtient :

   $2x^3 + 3x^2 - 5 = (x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 0,$ d'où $x = y = 1$, car $(2x^2 + 5x + 5) \neq 0.$

10. La moyenne nationale est égale à : $\dfrac{(8{,}2 \times 120) + (13{,}1 \times 80) + (9{,}68 \times 100)}{(120 + 80 + 100)} = 10$.

Exercice n° 2

1. La dérivée de f est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{1-Ln\,x}{x^{2}}$, cette fonction est croissante sur l'intervalle $]0,e]$, décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$ et nulle pour $x=e$.

2. La dérivée seconde de f est égale à : $f^{''}(x)=\dfrac{(-3+2Ln\,x)}{x^{3}}$ et cette dérivée seconde s'annule pour $x=e\sqrt{e}$ et change de signe au voisinage. Le point de coordonnées $(e\sqrt{e},3/2e\sqrt{e})$ est donc un point d'inflexion pour cette fonction.

3. On obtient directement $I=\int_{1}^{e}f(x)\,dx=\left[\dfrac{(Ln\,x)^{2}}{2}\right]_{1}^{e}=1/2$.

Exercice n° 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+z=2 \\ x+2y+3z=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

En combinant la première et la troisième ligne, on obtient : $z=x+\dfrac{1}{2}$, puis en remplaçant dans les deux premières équations; $xy+x=\dfrac{3}{2}$ et $2x+y=\dfrac{5}{2}$, d'où $-4x^{2}+7x-3=0$. On obtient alors les solutions suivantes :

$$(x,y,z)=(1,1/2,3/2)\text{ ou }(3/4,1,5/4).$$

Exercice n° 4

1. Cette fonction f est strictement convexe (dérivée seconde strictement positive), elle admet un minimum unique en la valeur qui annule la dérivée première.

$f'(x)=2ax-2(1-x)\ b=0$ pour $x=\dfrac{b}{a+b}$ et le minimum est égal à $f(\dfrac{b}{a+b})=\dfrac{ab}{a+b}$

2. On a $\frac{ab}{a+b} = 2/3$ et $a+b=3$. Il s'agit donc de trouver deux nombres connaissant leur produit et leur somme. On trouve $b=1$ et $a=2\,(b<a)$.

3. Les points d'intersection sont déterminés par l'équation : $f(x)=g(x)$ ou encore $ax^2+(1-x)^2 b = \alpha x$, ce qui revient à résoudre l'équation : $(a+b)x^2-(\alpha+2b)x+b=0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = (\alpha+2b)^2-4b(a+b) = \alpha^2+4\alpha b-4ab$.

Si $0<\alpha<-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a deux points d'intersection,

Si $\alpha=-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a un seul point d'intersection (la droite est tangente à la parabole),

Si $\alpha>-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, pas d'intersection entre les deux graphes.

4. Montrons que l'axe vertical qui passe par le minimum de la fonction est un axe de symétrie.

Soit $X = x-\frac{b}{a+b}$, la fonction devient $f(x)=f(X+\frac{b}{a+b})=(a+b)X^2+\frac{ab}{a+b}$ et cette fonction est paire en *X*.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x}$

1. On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus $\underset{x\to 0}{Lim} f(x) = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{x^2}{x}=0$, on peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0)=0$.

La dérivée de f est égale à $f'(x)=\frac{2x^2-(1+x^2)Ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$.

ou encore $2(t-1)-tLnt=0$ en posant $t=1+x^2$, $t\geq 1$.

Soit $z(t)=2(t-1)-tLnt=0$, $z'(t)=1-Lnt$ qui est nulle pour $t=e$.

On trouve $z(e)=e-2>0$ et par exemple $z(e^2)=-2<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur t_0 dans l'intervalle $]e,e^2[$ qui annule $z(t)$. Soit $x_0=\sqrt{t_0-1}$. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,x_0[$ et décroissante sur $]x_0,+\infty[$.

La fonction est croissante sur l'intervalle $]0,\sqrt{e-1}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{e-1},+\infty[$.

2. $I = \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 Ln(1+x^2)\,dx = \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = Ln2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

On obtient :

$$I = Ln2 - 2 + 2\left[Arctgx\right]_0^1 = Ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n strictement positif.

On vérifie facilement par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{Ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$,

La suite (u_n) étant minorée et décroissante, elle converge vers une limite unique l solution de l'équation $l = f(l)$, car f est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où $l = 0$

Exercice n° 6

On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x. On définit alors la fonction numérique f par : $f(x) = x\,E(x)$.

1. $E(x)$ étant constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, où n est un entier. Elle est continue et dérivable sur $R - Z$. Donc f est également continue et dérivable sur $R - Z$. Les questions ne se posent qu'aux valeurs entières.

Pour $x = n$, $f(x) = n^2$ et $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} x(n-1) = n(n-1) \neq f(n)$ si $n \neq 0$.

En conclusion f est continue seulement en $x = 0$ parmi les valeurs entières.

2. D'après la question précédente, la dérivabilité ne se pose qu'en zéro. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(f(x) - f(0))}{x} = -1 \neq f(0) = 0$, donc f n'est pas dérivable à l'origine.

3. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx + 0 + \int_{1}^{2} x\,dx = 1/2 + 3/2 = 2$

Exercice n° 7

On considère la fonction f définie sur $R^{+*} \times R^{+*}$ par $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs, α et β étant des paramètres réels strictement positifs.

1. On obtient : $(g_y)'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta}$. La dérivée étant strictement positive, la fonction est strictement croissante. Elle est convexe si $\alpha > 1$, concave pour $0 < \alpha < 1$ et constante si $\alpha = 1$.

2. Comme la fonction f est croissante, son maximum est atteint pour la plus grande valeur possible de x qui vérifie la contrainte $ax + by \leq r$, donc pour $x = \dfrac{r - by}{a}$

Ce maximum est égal à $(\dfrac{r-by}{a})^{\alpha} y^{\beta}$

3. On peut considérer que x et y correspondent à deux produits. L'individu cherche à maximiser sa consommation en x (quitte à diminuer sa consommation en y, sans être nulle) sans dépasser son revenu (r) disponible. La fonction correspond à une fonction de Cobb-Douglas.