INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée, *en* $x = 0$, de la fonction numérique d'une variable réelle f définie par :

$$f(x) = e^{x^2} Ln(1+x)$$, où Ln désigne le logarithme népérien.

2. Soit la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$$, où b et c sont des paramètres réels.

Pour quelle valeur de x, la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^3 + x - 2 = 0$

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation :

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

5. Calculer $I = \int_0^1 (Ln4 - Ln(1+x))\,dx$, où Ln désigne le logarithme népérien.

6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, où $u_0 = -1, u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ pour $n \geq 1$. Calculer $\lim_{n \to \infty} S_n$.

7. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

8. Au mois de janvier, les prix ont augmenté de 0,8 %. Sachant que sur les deux premiers mois (janvier et février), les prix ont augmenté de 1,808 %. Quelle est l'augmentation du mois de février ?

9. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x^3 + 3y = 4 \\ x^2 - 2y = -1 \end{cases}$$

10. Dans une épreuve scolaire nationale, le premier groupe d'élèves composé de 120 candidats a obtenu une moyenne égale à 8,20, le second groupe composé de 80 candidats une moyenne de 13,10 et enfin le troisième groupe formé de 100 candidats une moyenne de 9,68. Quelle est la moyenne nationale ?

Exercice n° 2

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f définie sur R^{+*} par :

$f(x) = \frac{Ln\, x}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

2. Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

3. Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^e f(x)\, dx$

Exercice n° 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + z = 2 \\ x + 2y + 3z = \frac{13}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 4

Soient a et b deux paramètres réels strictement positifs tels que $b < a$.

On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = ax^2 + (1-x)^2 b.$$

1. Déterminer, s'il existe, le minimum de cette fonction.

2. Trouver a et b tels que le minimum de f soit égal à 2/3 et leur somme à 3.

3. Déterminer le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et le graphe de la fonction g définie par : $g(x) = \alpha x$, selon les valeurs du paramètre réel strictement positif α.

4. Montrer que f admet un axe de symétrie.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x^2)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine).

2. Calculer $I = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   - Montrer que cette suite est bien définie.
   - Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

Exercice n° 6

On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x. On définit alors la fonction numérique f par : $f(x) = x\,E(x)$.

1. Etudier la continuité de f.

2. Etudier la dérivabilité de f.

3. Calculer $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

Exercice n° 7

On considère la fonction f définie sur $R^{+*} \times R^{+*}$ par $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs, α et β étant des paramètres réels strictement positifs.

1. Pour y fixé, on pose $g_y(x) = f(x,y)$. Etudier les variations de g_y selon les valeurs de α et donner l'allure de son graphe.

2. On suppose que pour tout couple (x,y) de $R^{+*} \times R^{+*}$, on a : $ax + by \le r$, où a,b et r sont des réels strictement positifs. Résoudre le problème $\underset{x}{Max}\, f(x,y)$ (maximum de f en x).

3. Interpréter le problème d'optimisation précédent.