

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\lim_n u_n = \lim_n n(e^{1/n} - 1) = \lim_n n(1 + \frac{1}{n} - 1) = 1.$

2. $I = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \left[\frac{(2x-1)^3}{6} \right]_0^1 = 1/3$

3. Résoudre le système :



$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ (x+2y)(x-y) = 28 \\ x > 0 \end{cases}$$

dans l'ensemble des nombres réels. On obtient $x = 6$ et $y = 4$ (On remarque que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$).

4. Trouver, dans R^3 , un vecteur orthogonal au vecteur $u(1,2,3)$ et dans le plan d'équation : $x + y + z = 0$. Ce vecteur $v(x,y,z)$ doit vérifier $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$. Par exemple $v(1,-2,1)$.

5. Paul a 4 ans de plus que Pierre et 2 ans de moins que Jacques. A eux trois, ils totalisent 70 ans. Quel est l'âge de Pierre ? Pierre a 20 ans.

6. La dérivée de $x \operatorname{Arctg} x$ est égale à $\operatorname{Arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$ et au point $x = \pi/4$,

on trouve $1 + \frac{4\pi}{16 + \pi^2}$.

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

- a. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
- b. Toute fonction continue est dérivable.
- c. La dérivée d'une fonction dérivable est continue.
- d. Il existe des fonctions définies sur tout R et continues en aucun point.

Réponse (d), avec la fonction caractéristique des rationnels (par exemple).

8. Un groupe d'entreprises possède 3 usines. Dans la première, le salaire moyen est de 100, dans la deuxième de 120 et dans la troisième de 90. Sachant que la moyenne des salaires dans ce groupe est de 104, qu'il y a 10 salariés dans la première usine et 20 salariés dans la deuxième, quel est l'effectif salarié de la troisième usine ?

Soit x l'effectif salarié de la troisième usine. On doit avoir :

$$\frac{(100 \times 10) + (120 \times 20) + (90 \times x)}{10 + 20 + x} = 104, \text{ d'où } x = 20.$$

9. Ecrire le nombre suivant x , ayant un développement décimal infini et périodique, sous la forme d'une fraction rationnelle : $x = 2,356356356\dots$

On a $1000x = 2356,356356\dots$ et par différence : $999x = 2354$, d'où $x = \frac{2354}{999}$.

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour $x > 1$, par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

On a $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, donc $F(x) = x - 2\ln(x+1) + k$

Exercice n° 2



Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^2 + 2(n-1)x + 1}{x+1}$$

1. Résoudre l'équation $f_n(x) = 0$. Il faut résoudre $n^2 x^2 + 2(n-1)x + 1 = 0$.

Soit $\Delta' = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1$.

Si $n > 1/2$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $n = 1/2$, l'équation admet une racine double égale à 2.

Si $n < 1/2$, l'équation admet deux racines : $x = \frac{1-n \pm \sqrt{\Delta'}}{n^2}$

2. Montrer que l'on peut exprimer $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x) = a_n x + b_n + \frac{c_n}{x+1}$.

Par identification des polynômes, on obtient :

$$a_n = n^2, b_n = -n^2 + 2(n-1) \text{ et } c_n = n^2 - 2n + 3.$$

3. Soit :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 a_n x + b_n + \frac{c_n}{x+1} dx = \left[a_n \frac{x^2}{2} + b_n x + c_n \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{a_n}{2} + b_n + c_n \ln 2.$$

$$\text{D'où } I_n = -\frac{n^2}{2} + 2(n-1) + (n^2 - 2n + 3) \ln 2$$

4. Calculer l'aire comprise entre les graphes de f_0 et f_1 , et les axes verticaux d'équation $x=0$ et $x=1$. Cette aire est égale à :

$$A = \int_0^1 |f_0(x) - f_1(x)| dx = \int_0^1 \left| -x - 1 + \frac{1}{x+1} \right| dx = 3/2 - \ln 2$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{2n} = -\infty$$



6. Tracer le graphe de la fonction f_1 . On a : $f_1(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ et sa dérivée $f_1'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$ est nulle pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$. La fonction n'est pas définie pour $x = -1$.

Son graphe admet les droites d'équation $x = -1$ et $y = x - 1$ comme asymptotes.

La fonction est décroissante sur l'intervalle $] -1, -1 + \sqrt{2}]$ et croissante sur l'intervalle $[-1 + \sqrt{2}, +\infty [$.

7. Montrer que le graphe de la fonction f_1 admet un point de symétrie. Ce point de symétrie correspond à l'intersection des deux asymptotes, à savoir le point de coordonnées $(-1, -2)$.

Avec le changement de variables : $x = X - 1$ et $y = Y - 2$, on obtient $Y = X + \frac{2}{X}$ qui est une fonction impaire.

Exercice n° 3

$$1. \text{ On a : } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = -1/2 + \ln 2$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$ (somme de Riemann).

Avec une intégration par parties, on retrouve l'intégrale précédente et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) = 1/4$$

Exercice° 4



Soit f une application numérique d'une variable réelle.

On rappelle que f est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dit que f est quasi-convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que toute fonction convexe est quasi-convexe.

Soit f une fonction convexe, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \sup(f(x), f(y)) + (1 - \lambda)\sup(f(x), f(y)) \text{ d'où } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sup(f(x), f(y)) \text{ et } f \text{ est quasi-convexe.}$$

2. Donner un exemple de fonction quasi-convexe et non convexe.

Par exemple, une fonction « convexe par morceaux » :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe et concave. Par exemple $\ln x$.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

1. La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive, donc la fonction est croissante. Elle passe par les points : $(0,1)$ et $(1, e/2)$. Elle tend vers $+\infty$ à $+\infty$ (branche parabolique dans la direction oy) et vers 0 à $-\infty$ (asymptote horizontale).

En $x=1$, on a une tangente horizontale et un point d'inflexion.

2. La convexité de f s'étudie avec le signe de la dérivée seconde.

On peut remarquer que $f''(x) = e^x(v(x) + v'(x))$, où $v(x) = \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Le signe de f'' est celui de $v(x) + v'(x)$.

On obtient : $v(x) + v'(x) = \frac{(1-x)}{(1+x^2)^3}(-x^3 + 3x^2 - 5x - 1)$

Ce polynôme d'ordre 3 est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$ et s'annule pour une seule valeur α comprise entre -1 et 0 .

La fonction f est donc convexe sur $]-\infty, \alpha]$ et $[1, +\infty[$, et concave entre α et 1 .

Exercice n° 6



Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \frac{x}{1 + E(x)}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

1. Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est définie pour $E(x) \neq -1$, donc pour $x \notin [-1, 0[$.

2. Etudier la continuité de f .

Pour tout $x \in [n, n+1[\cap Df$, $E(x) = n$ et $f(x) = \frac{x}{1+n}$ est une fonction affine continue.

Pour $x=n$, $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = 1 \neq f(n) = \frac{n}{n+1}$ et f n'est pas continue. En conclusion, f est continue sur $Df \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$.

3. Soit $g(x)$ la fonction indicatrice des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



Soit $h(x) = f(x) \times g(x)$. Etudier la continuité de h .

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en aucun point (densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$). Par conséquent h n'est continue en aucun point de D_f .