INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, R *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Exercice n° 1

1. Calculer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par $u_n = n(e^{1/n} - 1)$.

2. Calculer $I = \int_0^1 (2x-1)^2 \, dx$

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ (x+2y)(x-y) = 28 \\ x > 0 \end{cases}$$

dans l'ensemble des nombres réels.

4. Trouver, dans R^3, un vecteur orthogonal au vecteur $u(1,2,3)$ et dans le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

5. Paul a 4 ans de plus que Pierre et 2 ans de moins que Jacques. A eux trois, ils totalisent 70 ans. Quel est l'âge de Pierre ?

6. Quelle est la dérivée de $x\,Arctgx$ au point $x = \pi / 4$?

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.

b. Toute fonction continue est dérivable.

c. La dérivée d'une fonction dérivable est continue.

d. Il existe des fonctions définies sur tout R et continues en aucun point.

8. Un groupe d'entreprises possède 3 usines. Dans la première, le salaire moyen est de 100, dans la deuxième de 120 et dans la troisième de 90. Sachant que la moyenne des salaires dans ce groupe est de 104, qu'il y a 10 salariés dans la première usine et 20 salariés dans la deuxième, quel est l'effectif salarié de la troisième usine ?

9. Ecrire le nombre suivant x, ayant un développement décimal infini et périodique, sous la forme d'une fraction rationnelle : $x = 2{,}356356356\ldots$

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour x>1, par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Exercice n° 2

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2 + 2(n-1)x + 1}{x+1}$$

1. Résoudre l'équation $f_n(x) = 0$ selon les valeurs du paramètre réel n.

2. Montrer que l'on peut exprimer $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x) = a_n x + b_n + \dfrac{c_n}{x+1}$;

on explicitera les termes : a_n, b_n et c_n.

3. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Calculer I_0, I_1, I_2.

4. Calculer l'aire comprise entre les graphes de f_0 et f_1, et les axes verticaux d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

5. Calculer $\lim_{n \to \infty} \frac{I_n}{n}$

6. Tracer le graphe de la fonction f_1.

7. Montrer que le graphe de la fonction f_1 admet un point de symétrie.

Exercice n° 3

1. Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} Log(1 + \frac{k}{n})$$

Exercice n° 4

Soit f une application numérique d'une variable réelle.

On rappelle que f est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombres réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On dit que f est quasi-convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombres réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que toute fonction convexe est quasi-convexe.

2. Donner un exemple de fonction quasi-convexe et non convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, concave et non convexe.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

1. Etudier les variations de la fonction f.

2. Etudier la convexité de f.

3. Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x}{1+E(x)}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Etudier la continuité de f.

3. Soit g la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \in R - Q \end{cases}$$

Soit $h(x) = f(x) \times g(x)$. Etudier la continuité de h.