AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de $x e^{x^2+3x}$ est égale à $(1+x(2x+3))e^{x^2+3x}$ et en 1, on obtient $6e^4$

2. $I = \int_0^1 (x^2+\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = 1$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

3. La résolution du système : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$ donne (x, y) = (3, 2) ou (-3, -2)

4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

5. L'inéquation : $\frac{x^2-1}{x-2} < 0$ est vérifiée pour $x<-1$ ou $1<x<2$.

6. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et parallèle au vecteur de composantes (2, -1). Cette droite d'équation $y=ax+b$ admet pour pente $a=-1/2$ et donc : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné est continue sur cet intervalle. Faux

b. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Vrai

c. Toute fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Faux

d. Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné qui ne sont pas bornées. Faux

8. Quel est le capital obtenu au bout de 3 mois pour un montant de 200 Euro placé au taux mensuel de 1% ? Ce capital est égal à : $200(1{,}01)^3 = 206{,}06$

9. Laquelle de ces assertions est exacte ?

a. Riemann (célèbre pour ces travaux sur l'intégrale) est né en 1926. Faux en 1826

b. Cauchy (célèbre pour ces travaux sur les séries) est né en 1789. Vrai

c. Newton (qui partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal) est né en 1843. Faux en 1643

d. Euler (reconnu pour ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres) est né en 1807. Faux en 1707

10. Une primitive de la fonction *f* définie, pour *x*>1, par $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ est $F(x) = \frac{1}{2}Ln\left|x^2-1\right|$.

Exercice n° 2

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x - Ln|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f.

La fonction f est définie sur R^*.

On trouve les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

La dérivée est égale à $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et décroissante sinon.

Tableau de variation :

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ $\uparrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ 1	1 $\uparrow$ $+\infty$

2. Tracer le graphe de f .

Pour le graphe de f, on a une branche parabolique dans la direction $y = x$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. Le graphe suit le tableau de variation. La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction est convexe.

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et le graphe de f .

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^2 = \frac{1}{2} - Ln4$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

4. Etudier les variations de f_m .

f_m est définie sur R^*. Sa dérivée est égale à : $f_m^{'}(x) = m - \dfrac{1}{x}$ et elle est nulle pour $x = \dfrac{1}{m}$. f_m est donc décroissante sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{m}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{m}, +\infty\right[$.

Elle admet un minimum en $x = \dfrac{1}{m}$ égal à $Ln\,m$.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \leq x - 1$.

Pour $m = 1$, le minimum est nul, d'où pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \leq x - 1$.

6. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\dfrac{n}{H} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}$.

Comparer G et M (on pourra appliquer la question 5 avec $x = \dfrac{a_i}{M}$).

En appliquant la question 5 avec $x = \dfrac{a_i}{M}$, on obtient : $Ln\dfrac{a_i}{M} \leq \dfrac{a_i}{M} - 1$.

En sommant ces différentes inégalités, on a : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \leq \dfrac{1}{M}\sum_i a_i - n$.

Comme par ailleurs $M = \dfrac{1}{n}\sum_i a_i$, l'inégalité devient : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \leq 0$ ou encore

$\dfrac{1}{n}\sum_i Ln\,a_i \leq Ln\,M$ et $\sum_i Ln\,a_i^{1/n} = Ln\,G \leq Ln\,M$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on obtient $G \leq M$

7. Comparer G et H .

On remplace a_i par $\frac{1}{a_i}$ dans $G \le M$ pour obtenir :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\times....\times\frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+.....+\frac{1}{a_n}}{n}\text{, c'est à dire } \frac{1}{G}\le\frac{1}{H}\text{, d'où } H \le G$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$f(x) = x\cos(\frac{\pi}{x})$ si x est non nul et $f(0) = 0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

f est indéfiniment dérivable en dehors de l'origine, le problème ne se pose donc qu'en x=0.

On a : $\underset{0}{Lim} f(x) = 0 = f(0)$ (car la fonction cosinus est bornée par 1) et $\underset{0}{Lim}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\cos(\pi/x)$ qui n'existe pas. La fonction est donc continue en 0, mais non dérivable.

2. Préciser l'ensemble des nombres réels tels que :

a) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $\cos(\pi/x) = \cos(\pi/2)$, soit $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x = \frac{2}{1+2k}$

b) $f(x) = x$ si et seulement si $\cos(\pi/x) = 1 = \cos(2k\pi)$, soit $x = \frac{1}{2k}$

c) $f(x) = -x$ si et seulement si $\cos(\pi/x) = -1 = \cos((2k+1)\pi)$, soit $x = \frac{1}{2k+1}$

3. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f pour $x \ge \frac{1}{2}$.

$f'(x) = \cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}$ et

$f''(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x}$

4. Etudier la convexité de f pour $x \ge \frac{1}{2}$.

$f''(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x} = 0$ pour $\cos\frac{\pi}{x} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, d'où $x = \frac{2}{2k+1} > \frac{1}{2}$

Seules les valeurs de k=0 et 1 conviennent. Et f est convexe sur l'intervalle (2/3, 2).

Exercice n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de son produit, elle décide d'offrir des places pour une rencontre de football dans un dixième des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 80% permettent de gagner une place et 20% deux places.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées par un acheteur d'une seule tablette de chocolat.

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

X	0	1	2
Probabilités	9/10	0,8/10	0,2/10

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1,2}{10} = 12\%$$

3. Un autre client achète deux tablettes de chocolat.

Ecrivons la loi de probabilité de Y (nombre de places gagnées dans l'achat de deux tablettes) :

Y	0	1	2	3	4
Probabilités	81/100	14,4/100	4,24/100	0,32/100	0,04/100

- La probabilité qu'il ne gagne aucune place est égale à 81%.
- La probabilité qu'il gagne au moins une place est égale à 19%.
- La probabilité qu'il gagne exactement deux places est égale à 4,24%.

4. Le processus aléatoire est indépendant des équipes.

Exercice n° 5

Soit la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

Cette fonction est définie pour x>-1 et $x \neq 0$, mais remarquons que l'on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0)=1$.

La dérivée de f est égale à $f^{'}(x) = \dfrac{x-(1+x)Ln(x+1)}{x^2(x+1)}$.

Etudions alors $z = x-(1+x)Ln(x+1)$. On obtient alors $z^{'} = -Ln(x+1)$. Cette fonction est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, mais elle est reste toujours négative.

La fonction f est donc décroissante sur $]-1,+\infty]$ et à valeurs dans $]+\infty,0[$

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le graphe de f permet de voir qu'il ne coupe la première bissectrice qu'en un seul point. Algébriquement, il faut résoudre l'équation : $f(x) = x$, soit $Ln(x+1) = x^2$.

L'étude de la fonction $g(x) = Ln(x+1) - x^2$ et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de montrer qu'il existe un unique point fixe sur l'intervalle $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 6

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0,\pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

La fonction f_n est positive sur $[0,\pi/2]$, ainsi que sa dérivée : $f^{'}{}_n(x) = nx^{n-1}\sin x + x^n \cos x$. La fonction est donc croissante sur cet intervalle et à valeurs dans $[0,(\pi/2)^n]$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout *n*.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \left[-x^n \cos x\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx \text{ et}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = \left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)x^{n-2}\sin x\,dx \text{, d'où :}$$

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_{n+1}(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

On note $u(x)$ la limite quand elle existe de la suite $(u_n(x))$.

On a : $u_0(x) = f_0(x) = 0$, $u_1(x) = f_1(x)$ et par récurrence :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sin x \sum_{k=1}^{n} x^n = x\left(\frac{x^n - 1}{x-1}\right)\sin x$$

La suite $(u_n(x))$ est divergente pour $|x| \geq 1$, et elle est convergente pour $|x| < 1$. Dans ce cas, sa limite est égale à $u(x) = \dfrac{-x\sin x}{x-1}$