INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x e^{x^2+3x}$

2. Calculer $I = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})\, dx$

3. Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$

4. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ en fonction de *n.*

5. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x^2-1}{x-2} < 0$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et parallèle au vecteur de composantes (2, -1).

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle)?

a. Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné est continue sur cet intervalle.

b. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

c. Toute fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

d. Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné qui ne sont pas bornées.

8. Quel est le capital obtenu au bout de 3 mois pour un montant de 200 Euro placé au taux mensuel de 1% ?

9. Laquelle de ces assertions est exacte ?

a. Riemann (célèbre pour ces travaux sur l'intégrale) est né en 1926.

b. Cauchy (célèbre pour ces travaux sur les séries) est né en 1789.

c. Newton (qui partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal) est né en 1843.

d. Euler (reconnu pour ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres) est né en 1807.

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour $x>1$, par $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x)=x-Ln|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f.

2. Tracer le graphe de f.

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$,
et le graphe de f.

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x)=mx-1-Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

4. Etudier les variations de f_m.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \leq x - 1$.

6. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$.

Comparer G et M (on pourra appliquer la question 5 avec $x = \frac{a_i}{M}$).

7. Comparer G et H.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x\cos(\frac{\pi}{x}) \text{ si } x \text{ est non nul et } f(0) = 0.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

2. Préciser l'ensemble des nombres réels x dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$

3. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

4. Etudier la convexité de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

Exercice n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de son produit, elle décide d'offrir des places pour une rencontre de football dans un dixième des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 80% permettent de gagner une place et 20% deux places.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées par un acheteur d'une seule tablette de chocolat.

1. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

2. Calculer l'espérance mathématique de *X*.

3. Un autre client achète deux tablettes de chocolat.

- Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place.
- Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place.
- Déterminer la probabilité qu'il gagne exactement deux places.

4. Les résultats obtenus aux 3 questions précédentes peuvent-ils être modifiés si des précisions sont données sur les équipes de la rencontre de football ?

Exercice n° 5

Soit la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Exercice n° 6

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout *n*.

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_{n+1}(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

On note $u(x)$ la limite quand elle existe de la suite $(u_n(x))$.