

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2 \operatorname{Ln}(x + e^x)$

$$f'(x) = 2x \operatorname{Ln}(x + e^x) + \frac{x^2(1 + e^x)}{x + e^x} \quad f'(1) = 2 \operatorname{Ln}(1 + e) + \frac{(1 + e)}{1 + e} = 2 \operatorname{Ln}(1 + e) + 1$$

2. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} (x + 1) \sin x \, dx = [-(x + 1) \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2$

3. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

En posant $X = e^x$, on obtient : $x = 0$.



4. Trouver la primitive de $\frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}$.

$$F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + x^3} + k \text{ et } F(1) = \frac{2}{3} \sqrt{2} + k = 0, \text{ d'où } k = -\frac{2}{3} \sqrt{2}$$

5. Résoudre l'inéquation : $6x^2 - x - 1 < 0$

$$x^2 - x - 1 = 6(x - 1/2)(x + 1/3), \text{ donc } x \in \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

$$g = \left(\frac{9}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

La moyenne est égale à : $(0,5 \times 100) + (0,4 \times 300) + (0,1 \times 800) = 250$

8. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$



9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4

Pour $n=3$, $x=1$,

Pour $n=4$, $x=1$ ou -1

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

$U_{n+1} = \frac{1}{4^n}$ et cette suite converge vers 0.

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t , on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$



1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t , est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} F_t(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (1+t)x - 1}{1 - x - 1} = 1 + t \text{ et } F_t(0) = 1 + t$$

$$F_t'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_t(x) - F_t(0)}{x} = \frac{1}{2}(t + t^2), \text{ sachant qu'au voisinage de } 0 : e^u \approx 1 + u + u^2 / 2$$

2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p , et l'on pose

$$F_t(x) = 1 + \varphi_0(t) + \frac{\varphi_1(t)}{1!}x + \frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p + x^p \varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1 .

Avec ce qui précède : $\varphi_0(t) = t$ et $\varphi_1(t) = (t + t^2) / 2$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + \text{Ln}(x)$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de a , le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.
 $f_a'(x) = 0$ pour $x = 1/a$.

Si $a < 1/e$, alors l'équation admet deux racines,

Si $a = 1/e$, alors l'équation admet une racine,

Si $a > 1/e$, alors l'équation n'admet aucune racine.

2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.

$f_{1/2}$ est croissante jusqu'au maximum atteint en 2, puis décroissante, avec une branche parabolique dans la direction $y = -ax$.

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$.

$$I = \int_1^2 (-ax + Lnx) dx = \left[-ax^2/2 + xLnx - x \right]_1^2 = 7/4 - 2 \ln 2$$

4. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout $x, t > 0$, on a :
 $f_a(\alpha x + (1-\alpha)t) \geq \alpha f_a(x) + (1-\alpha)f_a(t)$

$f_a''(x) = -1/x^2$ et f est concave.

5. Etudier, selon les valeurs de a , la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

On a une suite géométrique :

Si $a < 1$, la suite est convergente vers 0,

Si $a = 1$, la suite est stationnaire égale à u_0 ,

Si $a > 1$, la suite est divergente.



Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n , on pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t + 1} dt$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$

On obtient : $I_1(x) = x - 2Ln(x+1)$ et $I_2(x) = \frac{x^2}{2} - x$

2. Calculer $I_3(x)$

On obtient : $I_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 2Ln(x+1)$

3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $\frac{x-1}{x+1}$ qui est nulle pour $x=1$. La fonction est décroissante de $-\infty$ à 1 puis croissante. Son minimum est égal à $1 - 2\ln 2$.

4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x) dx$

$$J_1 = \int_0^1 I_1(x) dx = \int_0^1 (x - 2\ln(x+1)) dx = \frac{1}{2} - 2[(x+1)\ln(x+1) - (x+1)]_0^1 = \frac{5}{2} - 4\ln 2$$



Exercice n° 5

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement un point $M(x, y)$. Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

La probabilité est égale au rapport des deux surfaces : la partie du disque dans le carré et le carré, soit : $\pi/4$

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$

On obtient $I(0) = \pi/2, I(1) = 1, I(2) = \pi/4$

2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$

On obtient : $I(n) = \frac{n-1}{n} I(n-2)$

3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$

On calcule $I(n+1) - I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos t - 1) dt \leq 0$. La suite est donc décroissante et de plus positive, donc convergente vers l .

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n+1)}{I(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = \frac{l}{l} = 1$$

5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.

$$u(0) = u(1) = \pi / 2$$

6. Démontrer que, pour tout n , $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.

$$u(n+1) = (n+2)I(n+2)I(n+1) = (n+2) \times \frac{(n+1)}{(n+2)} I(n)I(n+1) = u(n) = \pi / 2$$

7. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} nI^2(n)$

Comme la suite $I(n)$ est décroissante : $I(n+1) \leq I(n) \leq I(n-1)$, puis en multipliant par

$I(n)$ et n , on obtient : $u(n) \times \frac{n+1}{n} \leq nI^2(n) \leq u(n-1)$ et par passage à la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI^2(n) = \pi / 2$$

8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^p et de p .

$$\text{On obtient : } I(2p) = \frac{1 \times 2 \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \dots \div (2p)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \times C_{2p}^p}{2 \times 4^p} \text{ et}$$

$$I(2p+1) = \frac{2 \times 4 \dots \times (2p)}{3 \times 5 \dots \div (2p+1)} \times 1 = \frac{4^p}{(2p+1) \times C_{2p}^p}$$

 **Fomesoutra.com**
ga soutra!
Docs à portée de main