

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2 \operatorname{Arc} \tan(x)$

2. Calculer $I = \int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(x)}{x} dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

3. Résoudre l'équation : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{t+1}{t+2} dt$

5. Résoudre l'inéquation $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \leq 0$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan, qui passe par le point $A(1, -1)$ et est parallèle au vecteur $u(1, 2)$

7. Résoudre le système d'équations, où Ln désigne le logarithme népérien :

$$\begin{cases} \operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} y = 2 \\ x + y = \frac{5}{2}e \end{cases}$$

8. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} u_n$ et $u_0 > 0$

9. Une course à pied en relais (3 équipiers) se déroule entre les communes de Rockville et Fieldville, distantes de 38 kms.

Le premier coureur doit parcourir 10 kms et sa vitesse est de 14 kms/heure,
le deuxième coureur doit parcourir 13 kms et sa vitesse est de 17 kms/heure, et
le troisième coureur doit parcourir 15 kms et sa vitesse est de 16 kms/heure.
Quel sera le temps réalisé par ce relais ?

10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes strictement positifs.
2. Si la suite (u_n) est convergente, quelle est alors sa limite ?
3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox , le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.
5. Etudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 + x^2}$$

1. Etudier les variations de f .
2. Tracer le graphe de f .
3. Préciser les points d'inflexion de son graphe.

4. Calculer $I = \int_{-1}^1 (f(x) - 1) dx$

Exercice n° 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par:

$$f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe C admet une asymptote oblique D , et étudier la position relative de la courbe C par rapport à la droite D .
3. Etudier les variations de la fonction f .
4. Tracer la courbe C .
5. Calculer $I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx$, pour n entier strictement supérieur à 1.
6. Que représente I_n ?
7. Calculer la limite de I_n .

Exercice n° 5

On dispose de deux « dés ».

Le premier dé est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.

Le deuxième dé est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (surface la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Quelle est la probabilité que $X > 4$?
3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?

Exercice n° 6

On considère la suite de polynômes réels P_n définie par : $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$, pour $n \geq 2$.

1. Calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$
2. Montrer que P_n admet une unique racine α_n comprise entre 0 et 1 (on précisera la valeur exacte de α_2)
3. Démontrer que, pour $n \geq 2$: $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
4. Etudier la convergence de la suite (α_n)
5. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$ et en déduire que α_n est solution d'une équation de degré $n+1$.
6. Comparer $2\alpha_n - 1$ et α_2^{n+1}
7. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n)