

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)



Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x(1-e) - e = 0$
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
3. Calculer $I = \int_0^3 E(x) dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .
4. On augmente la longueur d'un rectangle de 20% et on diminue sa largeur de 20%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.
5. Calculer la dérivée de $\frac{e^{x+1}}{1+x^2}$ au point $x=1$.
6. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$
7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle strictement positive, définie par : $f(x) = x^{x^x}$. Calculer sa dérivée en $x=1$.

8. On considère le nombre $x=4,584584584\dots$. Ecrire ce nombre sous la forme d'une fraction rationnelle.

9. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

10. Dans un train, 20% des voyageurs portent un chapeau, 60% des voyageurs sont des femmes et 20% des hommes portent un chapeau. Quel est le pourcentage de femmes qui portent un chapeau ?

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \ln(x), \text{ où } \ln \text{ désigne le logarithme népérien.}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Montrer que f admet un unique point fixe.

3. Calculer $\int_1^2 f(x) dx$

Exercice n° 3

La fabrication d'un produit P nécessite de passer successivement par les machines A-B-C dans cet ordre. Le tableau suivant présente le temps de passage du produit dans chaque machine et la durée de fonctionnement des machines dans une journée.

Machine	Temps de passage	Durée
A	5 minutes	5 heures
B	10 minutes	6 heures
C	6 minutes	4 heures

Combien de produits peut-on fabriquer dans une journée ?

Exercice n° 4

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de φ .
2. Etudier la dérivabilité de φ .
3. Soit $f(x) = \sin(x) \cdot \varphi(x)$, étudier la continuité de f .

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique g_y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_y(x) = x^\alpha \cdot y^\beta, \text{ où } y, \alpha, \beta > 0$$

1. Etudier les variations de g_y et tracer son graphe.
2. On suppose que $ax + by \leq R$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs. Déterminer le maximum en x de la fonction g_y .
3. Soit la fonction h définie par : $h(t) = \frac{(R - bt)^\alpha t^\beta}{a^\alpha}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$.
Etudier les variations de h .

Exercice n° 6

Pour chacune des questions suivantes indiquées si l'assertion est vraie ou fausse.

1. Il existe des fonctions numériques d'une variable réelle définies en tout point et continues en aucun. Si l'assertion est vraie, donner un exemple.
2. Toute fonction numérique d'une variable réelle qui admet une dérivée première continue est deux fois dérivable.

Exercice n° 7

Soit f l'application définie par : $f(x) = 2x + \sin(x)$.

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 à l'origine.
2. Montrer que f est une bijection et que son application réciproque f^{-1} est 3 fois continûment dérivable.
3. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en $x=0$.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHEMATIQUES



Exercice n° 1

1. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x(1-e) - e = 0$

On pose $X = e^x$ pour obtenir : $X^2 + X(1-e) - e = 0$ qui a deux solutions e et -1 . Mais comme l'exponentielle est positive, on obtient $x=1$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

3. Calculer $I = \int_0^3 E(x) dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

$$I = \int_0^3 E(x) dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx = 3$$

4. On augmente la longueur d'un rectangle de 20% et on diminue sa largeur de 20%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.

Notons L la longueur et l la largeur du rectangle, sa surface est égale à $L \times l$ et en effectuant les changements, la surface est égale à : $1,2 \times L \times 0,8 \times l = 0,96 L \times l$; La surface a donc diminué de 4%.

5. Calculer la dérivée de $\frac{e^{x+1}}{1+x^2}$ au point $x=1$.

Pour $y = \frac{e^{x+1}}{1+x^2}$, on a $y' = \frac{e^{x+1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$ et en 1 sa valeur est égale à 0.

6. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$$

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle strictement positive, définie par : $f(x) = x^{x^x}$. Calculer sa dérivée en $x=1$.

Rappelons la définition des puissances : $x^a = e^{a \ln x}$. Posons $z = x^x = e^{x \ln x}$ et sa dérivée est égale à : $z' = x^x (1 + \ln x)$, d'où $f'(x) = x^{x^x} \times x^x \times \left[\ln x (1 + \ln x) + \frac{1}{x} \right]$ et $f'(1) = 1$

8. On considère le nombre $x=4,584584584\dots$. Ecrire ce nombre sous la forme d'une fraction rationnelle.

On a : $1000x = 4584,584584$ et par différence : $999x = 4580$, d'où $x = \frac{4580}{999}$

9. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

10. Dans un train, 20% des voyageurs portent un chapeau, 60% des voyageurs sont des femmes et 20% des hommes portent un chapeau. Quel est le pourcentage de femmes qui portent un chapeau ?

Il y a 40% d'hommes dans le train, dont 20% portent un chapeau, soit 8% des voyageurs. Donc 12% de femmes portent un chapeau.

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \ln(x), \text{ où } \ln \text{ désigne le logarithme népérien.}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour $x > 0$. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$.

La fonction est décroissante de $]0, 2]$ sur $] +\infty, 1 - \ln 2]$ et elle est croissante de $[2, +\infty[$ sur $[1 - \ln 2, +\infty[$. Elle admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{2}x$ et une asymptote verticale à l'origine.

2. Montrer que f admet un unique point fixe.

Un point fixe x vérifie : $f(x) = x$, soit $\frac{1}{2}x + \ln x = z = 0$. On étudie cette fonction z , qui est strictement croissante de R^{+*} sur R . Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution, donc un unique point fixe.

3. Calculer $\int_1^2 f(x) dx$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + (x - x \ln x) \right]_1^2 = \frac{7}{4} - \ln 4$$

Exercice n° 3

La fabrication d'un produit P nécessite de passer successivement par les machines A-B-C dans cet ordre. Le tableau suivant présente le temps de passage du produit dans chaque machine et la durée de fonctionnement des machines dans une journée.

Machine	Temps de passage	Durée
A	5 minutes	5 heures
B	10 minutes	6 heures
C	6 minutes	4 heures

Combien de produits peut-on fabriquer dans une journée ?

La machine A permet de fabriquer 12 produits en 1 heure, soit 60 produits

La machine B permet de fabriquer 6 produits en 1 heure, soit 36 produits

La machine C permet de fabriquer 10 produits en 1 heure, soit 40 produits

On peut donc fabriquer 36 produits dans la journée.

Exercice n° 4

Soit la fonction ϕ définie sur R (ensemble des nombres réels) par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R - Q \\ x^2 & \text{si } x \in Q \end{cases}$$

Où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de ϕ .

Rappelons que l'ensemble des nombres rationnels comme celui des irrationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels.

Si $x_0 \in R - Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = x_n^2 \rightarrow x_0^2 \neq \phi(x_0)$, donc la fonction n'est pas continue en tout point irrationnel ;

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R - Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = 1 \rightarrow 1 = \phi(x_0) = x_0^2$, si et seulement si $x_0 = \pm 1$,

En conclusion la fonction n'est continue qu'en $+1$ et -1 .

2. Etudier la dérivabilité de ϕ .

La fonction étant paire et continue qu'en $+1$ et -1 . Il suffit d'étudier la dérivabilité en 1 .

$$\text{On a } \frac{\phi(x) - \phi(1)}{x - 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in R - Q \\ x + 1 & \text{si } x \in Q - \{1\} \end{cases}$$

Ces deux expressions sont différentes en 1 , donc la fonction n'est pas dérivable.

3. Soit $f(x) = \sin(x) \cdot \phi(x)$, étudier la continuité de f .

$$\text{On obtient } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in R - Q \\ x^2 \sin x & \text{si } x \in Q \end{cases}$$

Si $x_0 \in R - Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = x_n^2 \sin x_n \rightarrow x_0^2 \sin x_0 = \sin x_0$ pour $x_0^2 = 1$ ou $\sin x_0 = 0$, soit $x_0 = \pi/2 + k\pi$

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R - Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = \sin x_n \rightarrow \sin x_0 = x_0^2 \sin x_0$ pour $x_0^2 = 1$, soit $x_0 = \pm 1$;

En conclusion la fonction est continue sur $\{\pm 1\} \cup \{\pi/2 + k\pi\}$.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique g_y définie par:

$$g_y(x) = x^\alpha \times y^\beta, \text{ où } y, \alpha, \beta > 0$$

1. Etudier les variations de g_y et tracer son graphe.

La fonction est définie pour $x > 0$ et rappelons que : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Sa dérivée est égale à : $g'_y(x) = \alpha x^{\alpha-1} \times y^\beta$. La fonction est donc strictement croissante de R^+ sur R^+ .

Si $\alpha > 1$, la fonction est convexe avec une branche parabolique dans la direction verticale.

Si $\alpha < 1$, la fonction est concave avec une branche parabolique dans la direction horizontale.

Si $\alpha = 1$, la fonction est une droite.

2. On suppose que $ax + by \leq R$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs. Déterminer le maximum en x de la fonction g_y .

Comme la fonction est strictement croissante en x , le maximum est donc atteint pour la plus grande valeur de x qui satisfait la contrainte, à savoir $x = \frac{R-by}{a}$ et le maximum vaut

$$\left(\frac{R-by}{a}\right)^\alpha y^\beta$$

3. Soit la fonction h définie par : $h(t) = \frac{(R-bt)^\alpha t^\beta}{a^\alpha}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$.

Etudier les variations de h .

La fonction est définie pour $R-bt > 0$ et $t > 0$, soit $0 < t < \frac{R}{b}$

Sa dérivée est égale à : $h'(t) = \frac{(R-bt)^{\alpha-1}}{a^\alpha} t^{\beta-1} [\beta(R-bt) - \alpha bt]$

Comme $\alpha + \beta = 1$, $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\beta R}{b}$ et la fonction h est strictement croissante de

$$h(t) = \frac{(1-\beta)^\alpha R^\alpha}{a^\alpha} \times \frac{(\beta R)^\beta}{b^\beta} = M$$

La fonction h est strictement croissante de $\left]0, \frac{\beta R}{b}\right]$ sur $]0, M]$ et

La fonction h est strictement décroissante de $\left[\frac{\beta R}{b}, \frac{R}{b}\right[$ sur $[M, 0[$

Exercice n° 6

Pour chacune des questions suivantes indiquées si l'assertion est vraie ou fausse.

1. Il existe des fonctions numériques d'une variable réelle définies en tout point et continues en aucun. Si l'assertion est vraie, donner un exemple.

Exact, avec par exemple la fonction caractéristique des rationnels.

2. Toute fonction numérique d'une variable qui admet une dérivée première continue est deux fois dérivable.

Faux, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exercice n° 7

Soit f l'application définie par : $f(x) = 2x + \sin(x)$.

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 à l'origine.

$$f(x) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2. Montrer que f est une bijection et que son application réciproque f^{-1} est 3 fois continument dérivable.

$f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection. L'application réciproque f^{-1} est aussi une fonction strictement croissante. Comme la dérivée n'est jamais nulle, (f^{-1}) est dérivable et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Par récurrence immédiate on en déduit que f^{-1} admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en $x=0$.

On a $f(0) = 0$ et on peut appliquer la formule du développement limité de f^{-1} à $f(x)$ au voisinage de 0. On détermine les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 du développement limité à partir de l'égalité $f^{-1}(f(x)) = x$ qui équivaut à :

$$a_0 + a_1 \left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + a_2 \left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + a_3 \left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o \left(\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 \right) = x$$

ou encore :

$$a_0 + a_1 \left(3x - \frac{x^3}{6} \right) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) = x$$

Et par identification des polynômes, on obtient : $a_0 = 0, a_1 = 1/3, a_2 = 0, a_3 = 1/18$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{x^3}{18} + o(x^3)$$