INSTITIT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. La fonction f étant définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = x^2 e^x + Ln(1+x^2)$. Calculer sa dérivée au point x=0

2. Pour x et y nombres réels, résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

3. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\sin(x)\ dx$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt = 0$

5. Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^3}} + 2 \right)$

6. Calculer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par $u_n = n(e^{1/n} - 1)$, où n est un entier strictement positif.

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation : x-y+1=0

8. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^3 \, Ln(x) \, dx$.

9. Résoudre l'équation : $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

    - Qualité supérieure : 80% des parcelles

    - Qualité moyenne : 15% des parcelles

    - Qualité inférieure : 5% des parcelles

    Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ?

Exercice n° 2

Le paramètre t étant un nombre réel strictement positif, on pose $y_t(x) = \dfrac{e^{-xt}}{xt}$, où x est un nombre réel non nul.

1. Etudier les variations de la fonction y_t et donner l'allure de son graphe.

2. Calculer $I_t = \int_0^1 x^2 \, y_t(x) \, dx$

3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I_t$ et $\lim\limits_{t \to 0} t^3 I_t$

Exercice n° 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ par :

$f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1, +\infty[$.

2. Pour k entier naturel non nul, on pose : $I_k = \left[-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x)$.

Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres, inférieurs à 10^p, dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel p).

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f définie par:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $(f(x))^2$ pour simplifier l'expression de $f(x)$ et tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels (x,y) tels que $y=f(x)$, avec $x\leq 10$.
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur J.
5. Déterminer la fonction g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère que celui de f. Que peut-on dire ?

Exercice n° 6

1. Etudier les variations et tracer le graphe da la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

3. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

Exercice n° 7

Pour un entier n, $n>0$, on pose : $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$, où n ! désigne le produit des entiers de 1 à n.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n
4. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $x^2e^x + Ln(1+x^2)$ au point x=0

   La dérivée est égale à $(x^2+2x)e^x + \dfrac{2x}{1+x^2}$ et au point x=0, cette dérivée est nulle.

2. .Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

   On obtient $y = 6/x$, puis $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$: L'ensemble des solutions est :

   (3,2) ;(-3,-2) ; (2,3) ;(-2,-3)

3. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\sin(x)\ dx$.

   La fonction étant impaire, l'intégrale est nulle.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt = 0$.

   Tous les termes sont strictement positifs, donc l'équation n'admet aucune solution.

5. Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{x^3}{2})}+2\right)=0$$

6. $\lim_{n} u_n=\lim_{n} n(e^{1/n}-1)=\lim_{n} n(1+\dfrac{1}{n}-1)=1$.

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation : *x*-*y*+1=0.

   On obtient $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

8. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} x^3\,Ln(x)\,dx$.

   Par intégration par parties, en posant $u' = x^3$, on obtient : $\int_{\varepsilon}^{1} x^3\,Ln(x)\,dx=\left[\dfrac{x^4}{4}Ln\,x\right]_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}\dfrac{x^3}{4}dx=-\dfrac{\varepsilon^4}{4}Ln\,\varepsilon-\dfrac{1}{16}+\dfrac{\varepsilon^4}{16}$ et la limite est égale à

   -1/16

9. Résoudre l'équation : $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$.

   Cette équation s'écrit : $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$ et les solutions sont : 0, 1, 2, 3

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

    - Qualité supérieure : 80% des parcelles

    - Qualité moyenne : 15% des parcelles

    - Qualité inférieure : 5% des parcelles

    Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ? La probabilité est égale à $(0{,}8)^3=51{,}2\%$

Exercice n° 2

Le paramètre t étant un nombre réel strictement positif, on pose $y_t(x)=\dfrac{e^{-xt}}{xt}$

1. Etudier les variations de la fonction réelle y_t et donner l'allure de son graphe.

   La fonction est définie pour x non nul. On a : $y'_t(x) = \dfrac{-e^{-xt}\, t\,(xt+1)}{(xt)^2}$ et cette dérivée est nulle pour $x=-1/t$. on a : $y_t(-1/t) = -e$. On a une branche parabolique dans la direction Oy à moins l'infini.

x	$-\infty$	$-1/t$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$y'_t(x)$	+	-	-
$y_t(x)$	$-\infty \nearrow$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

2. Calculer $I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx$

$$I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx = \frac{1}{t}\int_0^1 x e^{-xt}\, dx = \frac{-1}{t^2}\left[e^{-xt}\,(x+\frac{1}{t}) \right]_0^1 = \frac{1}{t^3}\left(1-e^{-t}(t+1)\right)$$

3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^3\, I_t$

   $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^3\, I_t = 1-1 = 0$

Exercice n° 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x) = -x-\sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = -x+\sqrt{x^2-1}$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1,+\infty[$.

   La dérivée de f est $f'(x) = -1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$ et la fonction est décroissante de -1 à $-\infty$

   La dérivée de g est $g'(x) = -1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ et la fonction est croissante de -1 à 0

2. Pour k entier naturel non nul, on pose : $I_k = \left[-k+\sqrt{k^2-1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k-\sqrt{k^2-1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

   Comme g est croissante, on a : $I_{k+1} \subset I_k$

   Comme f est décroissante, on a : $J_k \subset J_{k+1}$

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$

La résolution de l'équation $x^2+2kx+1>0$, montre que le domaine de définition de $f_k(x)$ est $I_k\cup J_k$ et on en déduit que le domaine de définition de φ_n est $I_n\cup J_n$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]=k$ (en multipliant l'expression par sa quantité conjuguée) et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres qui sont inférieurs à 10^p, dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel p)

Notons x y et z les trois chiffres qui composent un entier strictement inférieur à 10^p. Ce nombre s'écrit : $n=100x+10y+z$. Il faut pour que la somme soit inférieure à 10^p et que $x\le 3; y\le 3; z\le 3$.

Pour p= 0, $10^0=1$ et il n'existe aucun entier inférieur à 1 et dont la somme des chiffres est égale à 3,
Pour p= 1 $10^1=10$ et 3=003 est le seul nombre, donc $S_1=\{3\}$
Pour p= 2 $10^2=100$ et pour un entier de la forme xyz, il fat x=0 et y+z=3. D'où
$S_2=\{03,12,21,30\}$
Pour $p\ge 2$, x y et z doivent vérifier : $\begin{cases}100x+10y+z<10^p\\ x+y+z=3\end{cases}$

En faisant varier x, puis y, puis z de 0 à 3, on trouve :
$S_p=\{3,12,21,30,102,111,120,201,210,300\}$

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f définie par:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
Le domaine de définition de *f* est l'intervalle $[2,+\infty[$

2. Calculer $(f(x))^2$ pour simplifier l'expression de $f(x)$ et tracer le graphe de *f* dans un repère orthonormé.
$(f(x))^2 = 2\left((x-1)+|x-3|\right)$
Puis $(f(x)) = \begin{cases} 2 \;\; si \;\; 2 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{x-2} \;\; si \;\; x \ge 3 \end{cases}$

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) tels que $y = f(x)$, avec *x* inférieur ou égal à 10.
Les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $y = f(x)$ sont (2, 2) ; (3, 2) et (6, 4).

4. Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que *g* est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de *g* est dérivable sur *J*.
Comme la fonction *f* est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$

5. Déterminer la fonction g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère que celui de *f*. Que peut-on dire ?
On a $g^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 2$ et le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de *g* par rapport à la première bissectrice.

Exercice n° 6

1. Etudier les variations et tracer le graphe da la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$
On décompose la fonction sous la forme : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{3}{x+1}$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = -1$. La droite d'équation $y = x - 1$ est donc une asymptote oblique et la droite *x*=-1 une asymptote verticale.

$$f'(x) = \frac{x^2+2}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1	-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-			-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

Soit $I=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 (x-1+\frac{3}{x+1})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+3Ln(x+1)\right]_1^2=\frac{1}{2}+3Ln(\frac{3}{2})$

3. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
Le point (-1, -2) est un centre de symétrie (intersection des deux asymptotes), en effet en posant $X=x+1$ et $Y=y+2$, on obtient la fonction impaire : $Y=X+\frac{3}{X}$

Exercice n° 7

Soit $I_n=\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1. On obtient $I_1=e^2-3$ (en intégrant par parties).

2. Montrer que pour tout entier *n* strictement positif, on a : $0\leq I_n\leq\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

$$0\leq I_n\leq\int_0^2\frac{1}{n!}2^n\,e^2\,dx\leq\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$$

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

$$I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\text{ (intégration par parties)}$$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.
La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro, et comme elle est majorée par $\frac{2^n e^2}{(n)!}$ qui converge vers 0, elle converge vers 0.