

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE



PROBLEME N° 1

1) On a :

$$S_n - S_{n-1} = 1/n^5 > 0$$

donc la suite est croissante et on a la majoration :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n dx/x^5$$

Le membre de droite est fini car l'intégrale est convergente. (S_n) est une suite croissante et majorée donc convergente. Sa limite est la somme de la série $S = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^5 < +\infty$

2) On a :

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} dx/x^5 &= [1/i^4 - 1/(i+1)^4]/4 \\ &= [(i+1)^4 - i^4]/[4i^4(i+1)^4] \\ &= [1+4i+6i^2+4i^3]/[4i^4(i+1)^4] \leq 1/i^5 \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \int_{i-1}^i dx/x^5 &= [1/(i-1)^4 - 1/i^4]/4 \\ &= [i^4 - (i-1)^4]/[4i^4(i-1)^4] \\ &= [-1+4i-6i^2+4i^3]/[4i^4(i-1)^4] \geq 1/i^5 \end{aligned}$$

3.1) D'après 2) on a $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} i^5 \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4$

3.2) Pour approximer S avec 5 décimales exactes, il faut garder pour chaque terme de (S_n) 5 décimales.

3.3) Comme :

$$S - S_n = R_n \leq 1/4n^4,$$

on peut approximer S par S_n avec une précision inférieure à $1/4n^4$.

3.4) Pour calculer S avec 5 décimales exactes, il faut que :

$$1/4n^4 \leq 10^{-5},$$

c'est à dire $4n^4 \geq 10^5$, soit $n \geq 10^{5/4}/4^{1/4}$. D'où $n \geq 13$.

4.1) On a :

$$\int_{n+1}^{\infty} dx/x^5 \leq R_n \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4,$$

c'est à dire

$$1/4(n+1)^4 \leq R_n \leq 1/4n^4$$

4.2) Si on approxime R_n par $(M_n + m_n)/2$, la valeur approchée de S est $S_n + R_n = S_n + (M_n + m_n)/2$, c'est à dire que S est encadrée par $S_n + m_n$ et $S_n + M_n$.

4.3) La précision de l'encadrement en tenant compte des arrondis sur les termes de S_n est 10 fois supérieure à celle obtenue en n'en tenant pas compte.

4.4) Il faut choisir n de façon à ce que $S - (S_n + R_n) \leq 10^{-5}$. Or $(S - S_n) \leq 1/4n^4$ et l'encadrement de R_n montre que

$$-R_n \leq -1/4(n+1)^4.$$

On a donc :

$$(S - S_n) - R_n \leq 1/4n^4 - 1/4(n+1)^4$$

Comme on a $1/4n^4 - 1/4(n+1)^4 \leq 1/(n+1)^5$, il faut choisir n tel que

$$(n+1)^5 \leq 10^5, \text{ c'est à dire } n+1 \geq 10, \text{ ou encore } n \geq 9$$

4.5) On calcule S de proche en proche comme dans le tableau suivant :

i	$1/i^5$	$1/4(n+1)^4$	$1/4n^4$	S_n	R_n	Valeur approchée $S = S_n + R_n$
1	1,000000	0,015625	0,250000	1,000000	0,132813	
2	0,031250	0,003086	0,015625	1,031250	0,009356	1,040606
3	0,004115	0,000977	0,003086	1,035365	0,002031	1,037397
4	0,000977	0,000400	0,000977	1,036342	0,000688	1,037030
5	0,000320	0,000193	0,000400	1,036662	0,000296	1,036958
6	0,000129	0,000104	0,000193	1,036790	0,000149	1,036939
7	0,000059	0,000061	0,000104	1,036850	0,000083	1,036932
8	0,000031	0,000038	0,000061	1,036880	0,000050	1,036930
9	0,000017	0,000025	0,000038	1,036897	0,000032	1,036929
10	0,000010	0,000017	0,000025	1,036907	0,000021	1,036928
11	0,000006	0,000012	0,000017	1,036914	0,000015	1,036928
12	0,000004	0,000009	0,000012	1,036918	0,000010	1,036928
13	0,000003	0,000007	0,000009	1,036920	0,000008	1,036928
14	0,000002	0,000005	0,000007	1,036922	0,000006	1,036928
15	0,000001	0,000004	0,000005	1,036923	0,000004	1,036928

PROBLEME N° 2

1) On a :

$$P'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad \forall x$$

donc la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc sur le segment $[0 ; 1]$. On en déduit que P est bijective et comme $P(0) = -2 < 0$ et $P(1) = 2$, il existe un unique réel s de $[0 ; 1]$ tel que $P(s) = 0$

2) Il est facile de voir que :

$$\varphi_\lambda(x) = x + \lambda P(x) = x \Leftrightarrow \lambda P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda P(x) = 0 \text{ puisque } \lambda \text{ est non nul.}$$

3.1)

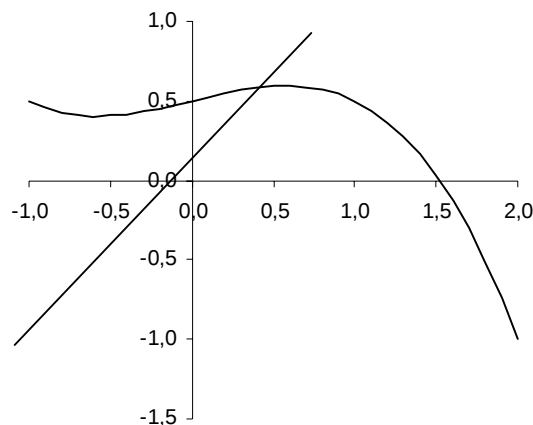
$$\begin{aligned} \varphi_{-1/4}(x) &= x - (x^3 + 3x - 2)/4 \\ &= (-x^3 + x + 2)/4. \end{aligned}$$

La dérivée est :

$$\varphi'_{-1/4}(x) = (-3x^2 + 1)/4$$

qui est positive dans le segment $[-1/\sqrt{3} ; 1/\sqrt{3}]$. D'où le tableau de variation :

x	-1	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	
$\varphi'_{-1/4}(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi_{-1/4}(x)$	1/2	↓	↑	↓	-1



3.2) Comme la fonction $\varphi_{-1/4}$ est continue, elle est bornée pour tout x dans $[0 ; 1]$.

donc la suite (u_n) est minorée. Pour $u_0=0.6$, la suite est décroissante donc convergente et sa limite ρ vérifie $\rho = \varphi_{-1/4}(\rho)$ soit $P(\rho)=0$, c'est à dire ρ est égale à la racine s de P compris entre 0 et 1.

3.3) Pour passer de u_n à u_{n+1} , on procède de la manière classique suivante :

a) On trace la droite $y=x$ (1^{ère} bissectrice des axes)

b) On détermine sur le graphique l'image $\varphi_{-1/4}(u_n)$ de u_n que l'on projette sur l'axe Oy .

c) u_{n+1} n'est autre que le symétrique de cette projection par rapport à la 1^{ère} bissectrice, c'est à dire le point de Ox qui a pour abscisse $\varphi_{-1/4}(u_n)$.

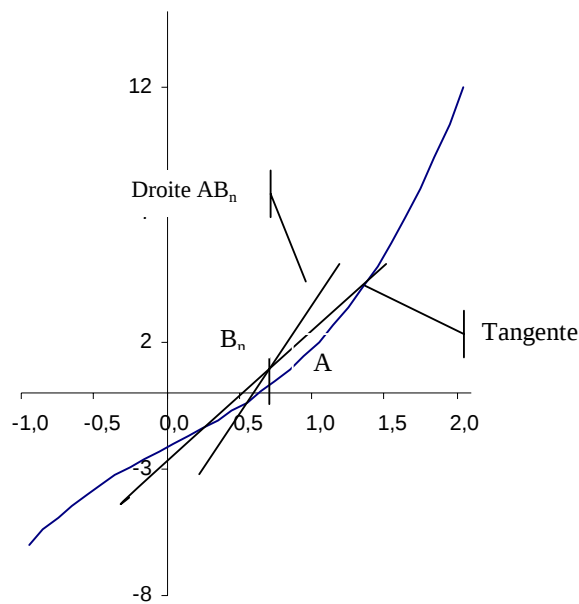
3.4) On obtient par récurrence les termes de la suite (u_n) comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de u_n :

n	u_n
0	0,6000000
1	0,5960000
2	0,5960728
3	0,5960716
4	0,5960716
5	0,5960716
6	0,5960716
7	0,5960716
8	0,5960716
9	0,5960716

On voit que u_n a 6 décimales exactes à partir du rang $n_0 = 3$ et $u_3 = 0,596\ 071$ avec 6 décimales exactes.

4) On a $P'(x)=3x^2+3>0 \forall x$, d'où le tableau de variation de P :

x	-1	2
P'(x)	+	
P(x)	-6	12



5.1) $[P(1)-P(v_n)]/(1-v_n)$ n'est autre que la pente de la droite qui passe par les points A et B_n de la courbe représentative de P qui ont pour coordonnées : $A[1, P(1)]$ et $B_n[v_n, P(v_n)]$. Cette droite a pour équation :

$$y - P(v_n) = (x - v_n)[P(1) - P(v_n)] / (1 - v_n).$$

Cette droite coupe l'axe Ox au point d'abscisse

$$x = v_n - P(v_n)(1 - v_n) / [P(1) - P(v_n)]$$

obtenu en faisant $y=0$ dans l'équation de la droite. On passe donc de v_n à v_{n+1} de la façon suivante :

a) on trace le point B_n de la courbe représentative de P qui a pour coordonnées v_n et $P(v_n)$ et la droite qui joint A et B_n .

b) v_{n+1} n'est autre que l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses Ox.

5.2) On obtient par récurrence les termes de la suite (v_n) comme dans le tableau suivant, en utilisant l'expression de v_n et de $P(v_n)$:

n	v_n	$P(v_n)$
0	0,6000000	0,0160000
1	0,5967742	0,0028574
2	0,5961973	0,0005109
3	0,5960941	0,0000914
4	0,5960757	0,0000163
5	0,5960724	0,0000029
6	0,5960718	0,0000005
7	0,5960717	0,0000001
8	0,5960716	0,0000000
9	0,5960716	0,0000000

5.3) On voit que v_n a 6 décimales exactes à partir du rang $n_0 = 6$ et $v_6 = 0,596\,071$ avec 6 décimales exactes.

5.4) On constate que la suite v_n converge vers la racine de P compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite v qui vérifie forcément l'équation de récurrence définissant v_n , c'est à dire :

$$v = v - P(v)(1 - v) / [P(1) - P(v)] \Leftrightarrow P(v) = 0$$

et v n'est autre que la racine de P compris entre 0 et 1.

6.1) $P'(w_n)$ est la pente de la droite tangente au point $B_n[v_n, P(v_n)]$ de la courbe représentative de P . Cette droite tangente a pour équation :

$$y - P(w_n) = P'(w_n)(x - w_n)$$

et coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = w_n - P(w_n)/P'(w_n)$ en faisant $y=0$ dans l'équation de la droite. On passe donc de w_n à w_{n+1} de la façon suivante :

a) on trace le point B_n de la courbe représentative de P qui a pour coordonnées w_n et $P(w_n)$ et la droite tangente à la courbe P au point B_n .

b) w_{n+1} n'est autre que l'intersection de cette droite tangente avec l'axe des abscisses Ox .

6.2) On obtient par récurrence les termes de la suite (w_n) comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de w_n , de $P(w_n)$ et de $P'(w_n)$:

n	w_n	$P'(w_n)$	$P(w_n)$
0	0,6000000	4,08	0,0160000
1	0,5960784	4,06592849	0,0000276
2	0,5960716	4,06590419	0,0000000
3	0,5960716	4,06590419	0,0000000
4	0,5960716	4,06590419	0,0000000
5	0,5960716	4,06590419	0,0000000
6	0,5960716	4,06590419	0,0000000
7	0,5960716	4,06590419	0,0000000
8	0,5960716	4,06590419	0,0000000
9	0,5960716	4,06590419	0,0000000

6.3) On voit que w_n a 6 décimales exacte à partir du rang $n_0 = 2$ et $w_2 = 0,596\ 071$ avec 6 décimales exactes.

6.4) On constate que la suite w_n converge vers la racine de P compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite ω qui vérifie l'équation de récurrence définissant w_n , c'est à dire :

$$\omega = \omega - P(\omega)/P'(\omega).$$

et ω n'est autre que la racine de P compris entre 0 et 1.

7) On constate que la suite (w_n) converge plus vite que la suite (u_n) , qui elle-même converge plus vite que la suite (v_n) , résultat classique en analyse numérique.