ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$2^{ème}$ COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $L(E)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans E. E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Préliminaire : Soit f dans $L(E)$. Montrer que si $(x, f(x))$ sont liés pour tout $x \in E$, alors f est une homothétie (Théorème de Schur).

Aide : on montrera d'abord que f est une homothétie sur des droites, puis sur tout système libre.

a) On suppose désormais que $E = M_{n,n}(K)$ est l'espace vectoriel des matrices de taille n sur le corps K. $GL_n(K)$ est l'ensemble des matrices inversibles. Quelle est la dimension de E? Donner une base de E. Monter que, si C est une matrice qui commute avec toute matrice A de $M_{n,n}(K)$, alors C est une homothétie.

b) Montrer que l'application *trace* :

$$tr : M_{n,n}(K) \to \mathbb{R}$$
$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \to tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

est une application linéaire de E^* et rappeler pourquoi

$$tr(AB) = tr(BA).$$

c) Montrer que l'application

$$\phi : \; E \to E^*$$
$$A \to \phi_A,$$

où $\phi_A(B) = tr(AM)$, est une isométrie de E dans E^*.

Aide : on montrera que cette application est linéaire et bijective.

d) Déterminer l'ensemble des fonctions linéaires $\psi \; : \; E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\psi(AB) = \psi(BA).$$

Exercice 2

a) Soit $M_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice. Cette matrice est-elle diagonalisable dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$? inversible?

b) Déterminer dans $\mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty}(1 + i\alpha/n)^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) En déduire $\lim_{n\to\infty}(M_n^n)$.

Problème

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, de base $(e_1, ..., e_n)$, muni du produit scalaire

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

lorsque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Un endomorphisme autoadjoint de E est une application V de $L(E)$ telle que

$$V = V^*.$$

On rappelle que tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Première partie

Si U et V sont dans $\mathcal{A}(E)$, on introduit la relation

$$U \preceq V,$$

si et seulement si

$$V - U \text{ est semi-définie positive,}$$

c'est-à-dire, pour tout x dans E

$$< x, (V - U)x > \geq 0.$$

a) La relation $\preceq$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathcal{A}(E)$? d'ordre total?

b) Montrer que, pour tout $B \in L(E)$,

$$U \preceq V \Longrightarrow BUB^* \preceq BVB^*.$$

c) Montrer que, pour $V \in \mathcal{A}(E)$, $0 \preceq V$ si et seulement si toutes les valeurs propres de V sont positives.

d) Soit $V \in \mathcal{A}(E)$ tel que $0 \preceq V$, montrer qu'il existe $C \in \mathcal{A}(E)$, $0 \preceq C$ telle que $V = C^2$. C est appelé racine carrée positive de V.

e) Montrer que les sous-espaces propres de V et ceux de C, une racine carrée positive, sont identiques. En déduire l'unicité de la racine carrée positive de tout endomorphisme autoadjoint, notée désormais $V^{1/2}$.

f) Montrer que V inversible $\Longleftrightarrow V^{1/2}$ inversible et que

$$(V^{1/2})^{-1} = (V^{-1})^{1/2}$$

Deuxième partie

Pour tout $V \in \mathcal{A}(E)$, on appelle spectre de V, le n-uplet des valeurs propres ordonnées de V, que l'on note

$$sp(V) = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n.$$

Pour U et V dans $\mathcal{A}(E)$, on pose

$$sp(V) = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \geq sp(U) = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_i \geq \mu_i,\ i = 1, ...n.$$

Le but de cette partie est de comparer cette relation d'ordre sur les valeurs propres avec la relation d'ordre $U \preceq V$.

a) Soient $(u_1, ...u_p)$ des vecteurs propres orthogonaux associés à $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, ..., \lambda_{i_p})$, une sélection ordonnées de valeurs propres, $\lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_2} \geq ... \geq \lambda_{i_p}$. On note $F_p = vect(u_1, ...u_p)$, l'espace vectoriel engendré par $(u_1, ...u_p)$. Déterminer

$$M_p = \sup_{x \in F_p \setminus \{0\}} \frac{< x, Vx >}{< x, x >}$$

et

$$m_p = \inf_{x \in F_p \setminus \{0\}} \frac{< x, Vx >}{< x, x >}.$$

b) Soient V et U dans $\mathcal{A}(E)$ tels que $U \preceq V$. Soit F^V_{n-p+1} l'espace vectoriel engendré par les $n-p+1$ vecteurs propres associés aux $n-p+1$ plus petites valeurs propres de V, et soit F^U_p l'espace vectoriel engendré par les p vecteurs propres associés aux p plus grandes valeurs propres de U. Déterminer

$$M_{V,p} = \sup_{x \in F^V_{n-p+1} \setminus \{0\}} \frac{< x, Vx >}{< x, x >}$$

et

$$m_{U,p} = \inf_{x \in F^U_p \setminus \{0\}} \frac{< x, Vx >}{< x, x >}.$$

c) Déduire de ce qui précède que

$$U \preceq V \Longrightarrow sp(U) \leq sp(V).$$

Aide : on montrera qu'il existe un point $x_0 \neq 0 \in F^V_{n-p+1} \cap F^U_p$ *et on comparera alors* $\frac{<x_0, Vx_0>}{<x_0, x_0>}$ *à* $M_{V,p},\ m_{U,p}$.

d) Vérifier que la réciproque est fausse pour $n = 2$ en prenant

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Donner un contre-exemple dans le cas général où $n > 2$.

e) Montrer que $sp(V) \geq sp(U)$ si et seulement si il existe un endomorphisme orthogonal A tel que

$$V \succeq AUA^*.$$