AVRIL 2012

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

# CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

## Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie sur $]-1,+\infty]$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de *f*.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ . La fonction est donc strictement croissante, à valeurs dans $R^+$ ;

2. Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=\frac{1}{2}$ . Montrer que la suite $(u_n)$ converge.

On peut aisément vérifier que $u_n>0$ , puis $u_{n+1}-u_n\geq 0$ , et par récurrence que $u_n\leq 1$ . La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée, donc elle converge.

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$ .

Comme *f*. est continue, la limite *l* de la suite $(u_n)$ doit vérifier : $l=f(l)=\sqrt{\frac{l+1}{2}}$ , à savoir : $2l^2-l-1=0$ et comme cette limite est positive, on obtient : *l*=1.

**Exercice n° 2**

Soit la suite $(S_n)$ définie, pour $n \in N^*$, par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

1. On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ . Démontrer que ces suites sont adjacentes.

On a :

$v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ qui tend vers zéro,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$, donc la suite $(u_n)$ est croissante,

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \leq 0$, donc la suite $(v_n)$ est décroissante.

Les deux suites sont donc adjacentes.

2. Démontrer que la suite $(S_n)$ converge.

Comme la suite des termes de rang pair et celle des termes de rang impair sont adjacentes, elles convergent vers une même limite qui est celle de la suite $(S_n)$.

3. Soit $x$ un nombre réel positif, exprimer $\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$ en fonction de $(-x)^{2n}$.

$\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$, car on a une suite géométrique de raison –$x$.

4. Soit la fonction numérique $f$ définie sur $R^+$ par : $f(x) = Ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ .

Etudier les variations de $f$ (on précisera le signe de $f$ ), $Ln$ désigne le logarithme népérien).

La dérivée de $f$ est égale à : $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0$

La fonction $f$ est donc croissante et comme $f(0)=0$, elle est positive. En particulier : $Ln(1+x) \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

5. Comparer $Ln(1+x)$ et $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

On procède comme à la question précédente (on remplace $n$ par $n$+1), à partir de la fonction : $g(x) = Ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ pour obtenir : $Ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

6. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

Des deux questions précédentes, on obtient : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \le Ln(1+x) \le \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ , puis pour $x$=1, $u_n \le Ln2 \le v_n$. Par conséquent la suite $(S_n)$ converge vers $Ln2$.

**Exercice n° 3**

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle boutique. Trois emplacements, notés 1, 2 et 3, sont disponibles. Il a été possible de contrôler le chiffre d'affaires de ces boutiques pendant une semaine (tableau1).

Tableau 1

| **Jours** | **Chiffre d'Affaires journaliers des boutiques** | | |
|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** |
| Lundi | 60 | 65 | 80 |
| Mardi | 80 | 70 | 20 |
| Mercredi | 75 | 75 | 40 |
| Jeudi | 55 | 68 | 110 |
| Vendredi | 88 | 66 | 10 |
| Samedi | 60 | 63 | 80 |
| Dimanche | 50 | 60 | 60 |

1. Calculer la moyenne des chiffres d'affaires de la semaine pour chaque emplacement.

2. Différents indicateurs statistiques qui peuvent aider l'entreprise à prendre sa décision sont proposés (variance, coefficient de variation) :
Soit $X$ le chiffre d'affaires d'une boutique et $x_i$ le chiffre d'affaires du jour $i$ ($i$=1,…,7)
Nous rappelons les définitions de ces différents indicateurs.

| **Indicateurs** | **Expression** |
|---|---|
| Variance | $Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ |
| Coefficient de variation | $CV(X) = \frac{\sigma(X)}{\overline{X}}$ |

Calculer la valeur de ces indicateurs pour chaque boutique.

On obtient les résultats suivants :

| Boutiques | $\overline{X}$ | $Var$ | $\sigma(X)$ | $CV$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **66,86 +** | 172,12 | 13,12 | 0,196 |
| 2 | 66,71 | **20,50 +** | **4,53** | **0,068 +** |
| 3 | 57,14 | 1106,19 | 33,26 | 0,582 |

3. En fonction de tous ces indicateurs, quel emplacement vous semble le meilleur et pourquoi ?

La boutique 1 a la meilleure moyenne, mais elle est plus risquée. La boutique 2 a une moyenne très proche de la 2, mais elle a l'avantage d'être nettement moins risquée. Il ne faut pas oublier que l'observation ne concerne qu'une semaine (cas d'un sondage).

On préfère donc la boutique 2.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

**Exercice n° 4**

Soit $E$ le sous espace vectoriel de $R^3$ déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y - z = 0\}$$

1. Déterminer une base de $E$. On notera $X$ la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de $E$.

$$\forall (x, y, z) \in E,\ \ (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1,0,1) + y(0,1,1) \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur $E$, dans la base canonique de $R^3$.

La matrice de projection orthogonale s'écrit : $M = X(X'X)^{-1}X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice *M* définie par :

$M = X(X'X)^{-1}X'$, où $X'$ désigne la transposée de *X*.

Cette matrice correspond à la matrice précédente de projection orthogonale, donc 1 est valeur propre double (dimension de *E*) ayant comme vecteurs propres, les deux vecteurs de *X*. Et 0 est l'autre valeur propre dont le vecteur propre associé est orthogonal à X, par exemple :

(1, 1, -1)

4. Déterminer, dans la base canonique de $R^3$, la matrice de la symétrie par rapport à *E*.

Soit $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,1)$ une base de E et $e_3 = (1,1,-1)$ un vecteur orthogonal. La matrice de la symétrie s'écrit dans cette base : $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par changement de base, la matrice *S* de cette symétrie est égale à : $S = P\Delta P^{-1}$, où *P* est la matrice du changement de base à savoir :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient : $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit *D* la droite vectorielle de $R^3$ engendrée par le vecteur $u = (1,1,-1)$.

- Déterminer, dans la base canonique de $R^3$, la matrice de la projection orthogonale sur *D*.

Comme la droite *D* est orthogonale à *E*, la matrice de la projection orthogonale sur *D* est égale à *I-M*, soit $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

- Déterminer, dans la base canonique de $R^3$, la matrice de la symétrie par rapport à *D*.

La matrice de la symétrie par rapport à *D*, composée avec la matrice de la symétrie par rapport à *E* est égale à moins la matrice unité. Donc c'est l'opposé de l'inverse de S (question 4)

$S_D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (on peut aussi procéder comme à la question 4).

**Exercice n° 5**

Soit $n$ un entier naturel non nul. Dans *R*, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de $(E_n)$ , notée $x_n$, et calculer sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.

Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.

$f_n$ est continue, strictement croissante et réalise une bijection de $R^+$ sur $[-1,+\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution $x_n$ ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in ]0,1[$ .

Si $x_{n+1} < x_n$ , alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1 = 0$ , ce qui est impossible. La suite $(x_n)$ est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite $l$.

Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est impossible, donc $l = 1$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour $n$ assez grand, on a :

$$\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$ , où $Ln$ désigne le logarithme népérien).

$f_n$ est strictement décroissante sur $]0,1[$ , $f_n(u_n) = 0$ , $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\,n$ et en déduire que

$$x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$$

Pour $n>2$, $Ln(\frac{Ln\,n}{2n}) \le Ln(u_n) \le Ln(2\frac{Ln\,n}{n})$ implique $Ln(u_n) \approx -Ln\,n$ , puis $nLn(1-u_n) = Ln\,u_n$ implique $-nu_n \approx -Ln\,n$ , d'où $u_n \approx \frac{Ln\,n}{n}$ et enfin $x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$