AVRIL 2014

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \text{ et } 0 < u_0 < 1$$

1. Etudier la convergence de cette suite (u_n) et donner sa limite (si elle est convergente).
On vérifie par récurrence que $u_n > 0$, et que $u_n < 1$;

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$. La suite est alors décroissante et minorée, donc elle converge. (On pouvait aussi calculer le rapport $u_{n+1}/u_n < 1$).

Sa limite l est donc solution de l'équation : $l = \frac{l}{2} + \frac{(l)^2}{4}$ qui admet 0 et 2 comme solution, mais comme la suite est strictement inférieure à 1, sa limite est zéro.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(v_n)^2}{4} \text{ et } 1 < v_0 \leq 2$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Etudier la convergence de cette suite (v_n) et donner sa limite (si elle est convergente).
On montre par récurrence que cette suite est majorée par 2.

On a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(v_n - 1)(v_n - 3) < 0$, car (v_n) est entre 1 et 2.
La suite étant strictement décroissante et minorée, elle converge vers une limite l, solution de l'équation : $l = \frac{3}{4} + \frac{(l)^2}{4}$, soit l=1 ou 3, mais comme la suite est bornée entre 1 et 2, sa limite est égale à 1.

On peut aussi poser $u_n = (v_n - 1)$ et on se retrouve dans la situation de la première question.

Exercice n° 2

Soit l'application linéaire *f* définie sur R^4 et à valeurs dans R^3 par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y, z+t, x+y+z+t)$$

1. Déterminer une base du noyau de *f*.
Il suffit de résoudre le système : $(x+y, z+t, x+y+z+t) = (0,0,0)$, soit x=-y et z=-t.
Les vecteurs $(1,-1,0,0)$ et $(0,0,1,-1)$ constituent une base du noyau.

2. Déterminer une base de l'image de *f,* notée *Im(f)*.
Comme $Dim\, R^4 = 4 = Dim\, Ker(f) + Dim\, \mathrm{Im}(f)$. La dimension de l'image est égale à 2 et donc engendrée par deux vecteurs indépendants. Par exemple $f(1,0,0,0) = (1,0,1)$ et $f(0,0,1,0) = (0,1,1)$. On peut aussi écrire :
$(x+y, z+t, x+y+z+t) = (x+y)(1,0,1) + (z+t)(0,1,1)$

3. En identifiant R^3 à $R^4 \times \{0\}$, quel est l'orthogonal de l'image de *f* dans R^4 ?
Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à $(1,0,1,0)$ et $(0,1,1,0)$ et indépendants entre eux.
Par exemple (en utilisant le produit scalaire) : $(1,1,-1,0)$ et $(1,1,-1,1)$. L'orthogonal de *f* est engendré par ces deux vecteurs.

4. Ecrire la matrice *A* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans une base formée dans la réunion d'une base de *Im(f)* et de son orthogonal.
La matrice s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Remarquons que cette matrice est diagonale.

5. Ecrire la matrice *M* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans la base canonique de R^4.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ et sa matrice inverse $$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Et enfin $$M = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2)-1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1. Montrer que f est impaire et continue.

On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\underset{x\to 0}{Lim} f(x) = f(0) = 0$

2. Montrer que f' garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t-1)\exp(t)+1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\underset{x\to 0}{Lim} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Pour $x \neq 0$,

$f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \dfrac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.
La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

3. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$ avec $\underset{x\to 0}{Lim}\ \varepsilon(x) = 0$. On prolonge ε en 0 par $\varepsilon(0) = 0$

4. Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5) \text{ et}$$
$$f^{-1} \, o \, f(x) = x \;\Rightarrow\; a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x^3 + 3\frac{x^5}{2}) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3} a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 4

Pour tout nombre réel x, on désigne par $E(x)$ sa partie entière, soit le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Etudier la continuité de la fonction f définie sur R^{+*} (ensemble des nombres réels strictement positifs) par : $f(x) = \frac{E(x)}{x}$

Si $n < x < n+1$, alors $f(x) = \frac{n}{x}$ et f est continue.

Si $x = n$, alors $f(x) = 1$ et $\underset{x \to n^-}{Lim} f(x) = \underset{x \to n^-}{Lim} \frac{n-1}{x} = \frac{n-1}{n} \neq 1$, et f n'est pas continue.

En conclusion f est continue sur $R^{+*} - N$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, étudier la convergence de cette suite et donner sa limite (si elle existe).

On a : $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$ et $\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$. Puis en divisant par la racine, on obtient : $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$, puis quand n tend vers l'infini, $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \to 1$

Exercice n° 5

1. Etudier les variations de tracer le graphe de la fonction numérique *sh* d'une variable réelle définie par : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Cette fonction est impaire, strictement croissante et convexe sur l'ensemble des réels positifs. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy. Sa dérivée est égale à : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(0) = 0$.

2. Soit $f(x) = Ln(1 + sh(x))$, où *Ln* désigne le logarithme népérien. Donner un développement limité de *f* d'ordre 3 au voisinage de zéro.

On a : $1 + sh(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $Ln\,(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

En remplaçant, on obtient : $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

3. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Comme la fonction est impaire, cette intégrale est nulle.

4. Soit $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, donner un développement limité de *g* d'ordre 2 au voisinage de zéro.

On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et en faisant la division euclidienne, on obtient : $g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$

5. Etudier le prolongement par continuité de *g* à l'origine. Cette fonction est-elle dérivable à l'origine ?

D'après ce qui précède, $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, donc *g* est prolongeable en zéro en posant *g*(0)=1.

Cherchons la limite en zéro de $\frac{g(x) - g(0)}{x} \approx \frac{-x/2}{x} = -1/2$, *g* est donc dérivable en zéro et sa dérivée est égale à -1/2

Exercice n° 6

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, où *n* est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de I_n quand *n* tend vers l'infini.

On a : $0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ et la suite converge vers zéro.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de *n*.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

3. Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

On a : $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k = 1 - x + x^2 + ...(-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$

Puis en intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k dx = \int_0^1 (\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}) dx = Ln\,2 + (-1)^{n+1} I_n \text{ et}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = Ln\,2 + (-1)^{n+1} I_n \to Ln\,2$

4. Soit $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Déterminer la limite de J_n quand *n* tend vers l'infini.

Le raisonnement est analogue à celui de la première question. On a : $0 < J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ et la suite converge vers zéro.

5. Calculer J_n en fonction de n.

La démarche est analogue à celle de la deuxième question.

$J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$, puis $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[Arctg\, x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et

$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[Ln\sqrt{x} \right]_0^1 = Ln\sqrt{2}$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Par récurrence, on obtient,

Pour n pair : $J_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ et

Pour n impair : $J_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^n Ln\sqrt{2}$