ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

PROBLEME N° 1

❶ Soit V(x, y) un vecteur quelconque de $\Re^2$. On pose : $N_1(V)=|x| + |y|$. Montrer que N_1 est une norme sur $\Re^2$. Dessiner la « sphère unité » S_1, ensemble des points (x, y) tels que $N_1(V) = 1$.

❷ On pose $N_\infty(V) = \sup(|x|, |y|)$. Montrer que N_∞ est une norme sur E. Dessiner la « sphère unité » S_∞, ensemble des points (x, y) tels que $N_\infty(V) = 1$.

❸ Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif A et le plus petit nombre réel strictement positif B tels que, pour tout V de $\Re^2$, l'on ait : $A.N_\infty(V) \leq N_1(V) \leq B.N_\infty(V)$ (1).

❹ Existe-t-il des vecteurs de $\Re^2$ pour lesquels les deux inégalités de (1) soient une égalité ? Si oui, préciser ces vecteurs.

❺ Soit N une norme **quelconque**.

① Montrer qu'il existe un nombre β strictement positif tel que, pour tout V de $\Re^2$, l'on ait :

$$N(V) \leq \beta.N_\infty(V)$$

② Montrer que pour tout V non nul appartenant à S_∞, l'on a $N(V) > 0$.

On admettra alors qu'il existe au moins un vecteur V_0 appartenant à S_∞ tel que l'on ait, pour tout V appartenant à S_∞, $N(V) \geq N(V_0)$.

En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout V appartenant à S_∞, l'on ait $N(V) \geq \gamma$.

③ Montrer qu'il existe un nombre réel α strictement positif tel que l'on ait, pour tout V de $\Re^2$:

$$\alpha.N_\infty(V) \leq N(V).$$

❻ Soient N et N' deux normes distinctes quelconques sur $\Re^2$. Déduire des questions précédentes qu'il existe deux nombres réels strictement positifs *a* et *b* tels que, pour tout V de $\Re^2$, l'on ait :

$$a.N'(V) \leq N(V) \leq b.N'(V) \qquad (2)$$

❼ Pour tout V(x, y) de $\Re^2$, on pose $H(V) = \sup_{t\in[0\,;1]} |x + ty|$.

Montrer que H est une norme sur $\Re^2$ et tracer sa « sphère unité » S, ensemble des points (x, y) tels que H(V) = 1.

❽ Mêmes questions pour $H'(V) = \int_0^1 |x + ty|dt$ et la « sphère unité » correspondante S'.

❾ Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif *p* et le plus petit nombre réel strictement positif *q* tels que l'on ait, pour tout V de $\Re^2$:

$$p.H'(V) \leq H(V) \leq q.H'(V)$$

On pourra utiliser les sphères unités S et S'.

Pour quels vecteurs V y a-t-il égalité ?

On pourra s'aider d'un raisonnement géométrique pour résoudre cette question.

PROBLEME N° 2

Première partie

❶ Montrer que pour tout entier naturel non nul k : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

❷ En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ où ln est le logarithme népérien.

❸ Déterminer alors la nature de la série de terme général $\frac{1}{n}$ et la nature de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

Deuxième partie

On dit que deux suites (α_n) et (β_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers zéro et un entier naturel N tels que, pour tout n > N, $\alpha_n = \beta_n(1 + \varepsilon_n)$. On écrit alors $\alpha_n \approx \beta_n$.

❶ ① Soit (a_n) une suite convergeant vers zéro. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier naturel p tel que pour tout n supérieur à p, on ait :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|a_k|$$

② En déduire que la suite (a_n) converge en moyenne vers zéro.

❷ Soit (b_n) une suite convergeant vers b. Montrer que la suite (b_n) converge en moyenne vers b.

❸ La suite (μ_n) définie par $\mu_n = (-1)^n$ est-elle convergente ? Est-elle convergente en moyenne ? Qu'en déduit-on ?

❹ ① Soit (c_n) une suite. Soit (δ_n) la suite définie par $\delta_n = c_{n+1} - c_n$. On suppose que (δ_n) converge vers c. Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n}\right)$ converge aussi vers c.

② On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

(i) Montrer que (u_n) est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?
(ii) Déterminer le nombre réel r strictement négatif tel que la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1}^r - u_n^r$ converge vers une limite non nulle l. On pourra utiliser un développement limité au voisinage de zéro de la fonction sinus.
(iii) En déduire que $u_n \approx \sqrt{\frac{3}{n}}$.