CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*

* *

PROBLEME n° 1

❶ On peut utiliser le critère de convergence de Cauchy : $\left(\frac{1}{ke^k}\right)^{\frac{1}{k}} \to \frac{1}{e} < 1$

ce qui prouve la convergence de la série

Par ailleurs ,en utilisant le développement en série de ln(1-x),il vient aisément que

$$\sum_1^{+\infty} \frac{(e^{-1})^k}{k} = -\ln(1-e^{-1}) = 1-\ln(e-1)$$

❷ ① On a : $A_1 = \int_1^e (\int_{\ln x}^{2\ln x} 1dy)dx = [x\ln x - x]_1^e = 1$ C.Q.F.D.

Voir la représentation du domaine D_1 ci-dessous.

② $A_k = \int_1^{e^k}\left(\int_{\ln x}^{2\ln x} 1dy\right)dx = [x\ln x - x]_1^{e^k} = 1 + e^k(k-1)$

③ $A_k^{-1} \approx \frac{1}{ke^k}$ d'où la convergence de la série d'après 1-

PROBLEME n° 2

❶ ① $$u_n = a\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+b\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+c\left(1-\frac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= a+c+\frac{b}{n}+\left(-\frac{a}{2n^2}-\frac{c}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

→ Si a+c est différent de 0 ,le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge

→ Si a+c=0, $u_n \approx \frac{b}{n}$ et la série diverge si b différent de 0

→ Si a+c=0 et b=0 la série est convergente car $u_n \approx \frac{K}{n^2}$

② $$S_n = \sum_1^n u_p = a\left(\left(\cos 1-\cos\frac{1}{2}\right)+....+\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)\right) = a\left(\cos 1-\cos\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = a(\cos 1-1)$$

C.Q.F.D.

❷ $|u_n| = \sin\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ décroît quand n augmente puisque sin x est croissante .

$|u_n| \to 0$ lorsque n tend vers l'infini
et $\sum$ une série alternée.

Il s'agit donc d'une série convergente mais semi-convergente car $|u_n| \approx \frac{1}{n^{1/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

❸ ① Utilisons le théorème de d'Alembert :

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|$ et donc R=1

② si x=1 $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et la série est divergente car équivalente à une série harmonique

si x=-1 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est le terme général d'une série alternée dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant et la série est alors convergente.

❹ ① $n^{1/n^\alpha} = e^{\frac{1}{n^\alpha}\ln n}$

Or, $\lim\limits_{n+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}\ln x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha}\ln n} = 1$

Par conséquent, $|u_n| \approx \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général de la série harmonique divergente

② $f(x) = e^{-\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\ln x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x}\left(1+\dfrac{1}{x^\alpha}(1-\alpha\ln x)\right) < 0$ ce qui prouve la décroissance de la fonction donc aussi celle de la suite vers 0 et la série alternée est donc convergente.

PROBLEME n° 3

❶ La fonction $\varphi : t \to \dfrac{\sin t}{t}$ définie si t différent de 0 est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.Donc l'intégrale est définie en 0.La fonction f est continue sur R car f est la primitive de φ qui s'annule pour 0.

❷ $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}dt$ .Le changement de variable u=-t nous donne : $f(-x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin(-u)}{(-u)}(-du) = -\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}du = -f(x)$ donc f est une fonction impaire et on l'étudiera sur $[0;+\infty[$

❸ f est dérivable sur R et $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ .f' a le même signe que sin x pour x positif c'est-à dire :

$$f'(x)=0; x=k\pi$$
$$f'(x)>0; x\in\left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[$$
$$f'(x)<0; x\in\left](2k+1)\pi;(2k+2)\pi\right[$$

On en déduit que les valeurs $k\pi$ correspondent aux extrêmas de f

Tableau de variations :

X	0	π	2π	3π......
F'(x)	1 +	0 -	0 +	0 -
f(x)				

❹ Pour montrer la convergence de I,on intègre par parties l'intégrale $I_a=\int_1^a \dfrac{\sin t}{t}dt$ en posant $u=\dfrac{1}{t}; dv=\sin t.dt \Rightarrow du=-\dfrac{1}{t^2}dt; v=-\cos t$

On obtient alors $I_a=\left[\dfrac{\cos t}{-t}\right]_1^a-\int_1^a \dfrac{\cos t}{t^2}dt$

Or, $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right|dt\leq\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}dt$ qui est une intégrale convergente.

Comme, de plus, $\lim\limits_{a\to+\infty}\left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_1^a=\cos 1-\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{\cos a}{a}=\cos 1$ alors I est convergente.

❺ Pour calculer $J_{n+1} - J_n$,on utilise la relation sin(2n+3)t-sin(2n+1)t=2sint.cos(2n+2)t

Alors : $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}.dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)t.dt = 0$

On en déduit que $J_{n+1} = J_n = ... = J_0 = \frac{\pi}{2}$

Rappelons le lemme de Riemann-Lebesgue :si g est une fonction continue sur [a ;b], $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t).\sin nt.dt = 0$

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} - \frac{\sin(2n+1)t}{t}\right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t).\sin(2n+1)t.dt$$

Il nous faut alors montrer que g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Il suffit pour cela d'étudier le problème en 0.

On utilise un développement limité de sin t en 0 :

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t.\sin t} = \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_1(t)}{t[t + t\varepsilon_2(t)]} = \frac{\frac{t}{6} + t\varepsilon_{1(t)}}{1 + \varepsilon_{2(t)}} \to 0$$

Lorsque t tend vers 0.On prolonge par continuité la fonction g en posant g(0)=0

L'application du lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction g nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

❼ Dans l'intégrale K_n on effectue le changement de variable u=(2n+1)t

On obtient alors :

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du$$

Et comme I est convergente,on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \to +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

donc:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

En conséquence, $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote en + l'infini à la courbe représentative de f

❽ Courbe représentative de f(x) :

PROBLEME n° 4

❶ La fonction f est périodique de période 1 si et seulement si :pour tout x réel,f(x+1)=f(x).

Or, $f(x+1) = e^{2j\pi(x+1)} = e^{2j\pi x}.e^{2j\pi} = e^{2j\pi x} = f(x)$

❷ $z_1 = a + ae^{4j\pi x} = a(1+e^{4j\pi x}) = ae^{2j\pi x}(e^{-2j\pi x} + e^{2j\pi x}) = 2a\cos(2\pi x)e^{2j\pi x}$

-Si $x = \frac{1}{4}, 2\pi x = \frac{\pi}{2}; z_1 = 0$

-Si $x \neq \frac{1}{4}$:

Le module de $z_1 : |z_1| = |2a\cos(2\pi x)|$

L'argument de z_1 dépend des signes de a et de $\cos(2\pi x)$

Sachant que x est compris entre 0 et 0.5 en étant différent de ¼ et donc que $(2\pi x) \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,il faut envisager 4 cas :

	$x \in \left[0;\frac{1}{4}\right[\Rightarrow 2\pi x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\cos(2\pi x) > 0$	$x \in \left]\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2\pi x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $\cos(2\pi x) < 0$
a>0	$Arg(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$	$Arg(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$
a<0	$Arg(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$	$Arg(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$

❸

$$z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{4j\pi x}) + e^{2j\pi x} = \frac{1}{2}e^{2j\pi x}(2\cos 2\pi x) + e^{2j\pi x} = e^{2j\pi x}(\cos 2\pi x + 1)$$
$$= [\cos(2\pi x) + 1; 2\pi x]$$

❹ On regroupe les termes ayant des coefficients égaux puis on factorise ce coefficient :

$$z = a_0(1 + e^{2j(n-1)\pi x}) + a_1(e^{2j\pi x} + e^{2j(n-2)\pi x}) + \ldots + a_{\frac{n}{2}}(e^{2j\frac{n}{2}\pi x} + e^{2j(n-\frac{n}{2}-1)\pi x})$$

Le calcul des expressions entre parenthèses nécessite une factorisation comme précédemment

$$a_k(e^{2jk\pi x} + e^{2j(n-1-k)\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x}(e^{(2k-n-1)j\pi x} + e^{-(2k-n-1)j\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x}.2\cos((2k-n-1)\pi x)$$

Donc , $z = 2e^{j(n-1)\pi x}\left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos((2k-n-1)\pi x\right]$

$$|z| = 2\left|\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x\right|$$

Quant à l'argument de z,il est égal à $(n-1)\pi x + 2k\pi$ si $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x > 0$

Et à $(n-1)\pi x + \pi + 2k\pi$ si $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x < 0$

Dans les deux cas, Arg(z) est une fonction affine de x