

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999



CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

PROBLEME N° 1

Rappel : le développement en série entière de $\ln(1-x)$ est pour $|x| < 1$: $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

- ❶ Démontrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k}$ est convergente et calculer sa somme

(on pourra songer à poser $x = e^{-1}$ et utiliser le développement en série entière de $\ln(1-x)$)

- ❷ ① Soit $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < e; \ln x < y < 2 \ln x\}$ et $A_1 = \iint_{D_1} dx dy$

Représenter D_1 et montrer que son aire $A_1 = 1$.

- ② Soit $D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < e^k; \ln x < y < 2 \ln x\}$ et $A_k = \iint_{D_k} dx dy$

Calculer l'aire A_k de D_k

- ③ Etudier la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-1}$

PROBLEME N° 2

Rappels :

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + u^3 \mathcal{E}(u); \lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{E}(u) = 0$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^4 \mathcal{E}(u); \lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{E}(u) = 0$$

❶ ① En utilisant les développements limités de $\cos u$ et $\sin u$, discuter selon les valeurs de a, b et c la nature de la série de terme général $u_n = a \cos \frac{1}{n} + b \sin \frac{1}{n} + c \cos \frac{1}{n+1}$

② Sachant que $a+c=0$ et $b=0$, montrez que la somme de cette série est $S=a(\cos 1 - 1)$

❷ On pose $u_n = (-1)^n \sin \left[\frac{\sqrt{n+1}}{n} \right]$ pour $n > 0$

Démontrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente

❸ On considère la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{2n+1}$

① Quel est son rayon de convergence R ?

② Etudier le cas $|x| = R$

❹ On pose $u_n = (-1)^n n^{-(1+\frac{1}{n^\alpha})}$ pour $n > 0$ et $\alpha > 0$

① Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente

② Etudier les variations de la fonction de la variable réelle $x > 0$ par $f(x) = e^{-(1+\frac{1}{x^\alpha}) \ln x}$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente

PROBLEME N° 3

Rappels:

Lemme de Riemann-Lebesgue : si g est une fonction continue sur

$$[a ; b], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cdot \sin nt \cdot dt = 0$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On considère la fonction $f : x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

- ❶ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
- ❷ Montrer que f est une fonction impaire
- ❸ Etudier les variations de f
- ❹ Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

(Pour cela ,on pourra songer à une intégration par parties de manière à pouvoir comparer I à une intégrale convergente)

On cherche à présent à calculer la limite de cette intégrale convergente.

Pour cela ,on considère les intégrales

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel.}$$

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$$

- ❺ Calculer $J_{n+1} - J_n$ et en déduire la valeur de J_n pour tout n entier naturel.
- ❻ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$ en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction $g : t \rightarrow \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$.

En déduire la limite de K_n quand $n \rightarrow +\infty$

⑦ Montrer enfin que $I = \frac{\pi}{2}$.

En déduire le comportement asymptotique de f en $\mp \infty$

⑧ Tracer la courbe représentative de f .

PROBLEME N° 4

Rappel :

$$\text{D'après les formules d'Euler : } \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

① Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(x) = e^{2j\pi x}$ est périodique de période 1 où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes.

② Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $z_1 = a + ae^{4j\pi x}$; $a \in \mathbb{R}^*$; $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Pour quelles valeurs de x a-t-on $z_1 = 0$?

③ Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2}$

④ On considère le nombre complexe z défini par :

$$z = a_0 + a_1 e^{2j\pi x} + a_2 e^{4j\pi x} + a_3 e^{6j\pi x} + \dots + a_k e^{2jk\pi x} + \dots + a_{n-1} e^{2(n-1)j\pi x}$$

Les n coefficients réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sont tels que :
 $a_0 = a_{n-1}; a_1 = a_{n-2}; \dots; a_k = a_{n-k-1}$

quelque soit le nombre entier k compris entre 0 et $\frac{n}{2}$.

Par ailleurs, on supposera que n est un nombre pair.

Démontrer que l'argument de z est une fonction affine de x .