CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1 - En effectuant dans J_n le changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-x; du=-dx$, on a

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\frac{\pi}{2}-u).du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n u.du=I_n \text{ C.Q.F.D.}$$

2 - Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[, 0\le I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}\sin^n x.dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$

$x\to\sin^n x$ est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$0\le I_n\le(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx\le(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})+\frac{\alpha}{2}$ en majorant le sinus par 1 dans la deuxième intégrale.

Or, $0\le\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=0\Rightarrow\exists M\in N/\forall n\ge M,(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})\le\frac{\alpha}{2}$

donc $\forall n\ge M, I_n\le\alpha$ c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty}I_n=0$ C.Q.F.D.

3 - A l'aide d'une intégration par parties , on obtient :

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\cdot\sin x.dx=\left[-\cos x.\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1).\cos x.\sin^n x.\cos x.dx=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.\cos^2 x.dx$$

d'où $I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.(1-\sin^2 x)dx=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}\Rightarrow(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

4 -

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx = 1$$

Si n est pair alors n=2p et on a

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2(p-1)} I_{2p-4} = \frac{(2p-1)\cdot (2p-3)...\cdot 1}{2p\cdot 2(p-1)\cdot .....\cdot 2} \cdot I_0$$

Soit , en multipliant le numérateur par (2p).(2p-2)……..2 le numérateur devient alors (2p) ! et le dénominateur (2p.2(p-1)….2)²=(2^p.p !)² donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De même , on a $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = ... = \frac{2p\cdot 2(p-1)\cdot ...\cdot 2}{(2p+1)\cdot (2p-1)\cdot ...\cdot 1} I_1$ soit :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

5 - pour tout x∈ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

La suite de terme général $(n+1)I_{n+1}I_n$ est donc une constante égale à sa valeur initiale

$$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}, \forall n \in N .$$

Par ailleurs , on a $0 \le I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ (en utilisant la formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n) et donc , d'après le théorème d'encadrement $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{In+1}}{I_n} = 1$ c'est-à-dire

$I_{n+1} \approx I_n$

Donc, $\frac{\pi}{2(n+1)} = I_{n+1}I_n \approx I_n{}^2 \Rightarrow I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

6 - $t \to e^{-t^2}$ étant continue et positive sur R^+ et $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et sachant que $t \to e^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ alors $t \to e^{-t^2}$ est intégrable sur R^+

Par ailleurs , $e^x > 1 + x$ sur R .On en déduit donc en particulier $\forall t \in [0;\sqrt{n}], 0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$ et

$\forall t \in R, 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{\frac{t^2}{n}} \Rightarrow \forall t \in [0;\sqrt{n}], 0 \leq (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$ et

$$\forall t \in R, (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq e^{t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow K_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

En posant $t = \sqrt{n}\sin u$ dans K_n , il vient : $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^n \sqrt{n}.\cos u.du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1}.du$

donc d'après ce qui précède $K_n \approx \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$t \to \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$ est continue et positive sur R^+ et $\frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \underset{\infty}{\approx} \frac{n^n}{t^{2n}}$, fonction qui est intégrable en $+\infty$

donc $t \to \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$ est intégrable sur R^+

D'où $e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = l_n$

En effectuant dans l_n le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan u, dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u}.du$, il vient

$$l_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 u)^n} \frac{\sqrt{n}.du}{\cos^2 u} = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n-1}.du \approx \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ donc

$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq l_n$, le théorème d'encadrement donne alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

PROBLEME II

1 - Soit (x , y) élément de R² tel que f(x)=f(y) alors on a $|x-y| \leq |f(x)-f(y)| = 0$ donc x = y.
Donc f est injective ,comme elle est continue et définie sur un intervalle ,elle est strictement monotone.

2 - La fonction f étant croissante on sait que soit f a une limite en $+\infty$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Supposons que f converge vers une limite l réelle
Soit x un réel , alors on a $f(x+1)-f(x) = |f(x+1)-f(x)| \geq |x+1-x| = 1$
En passant à la limite dans cette inéquation on obtient $0 = l - l \geq 1$ ce qui est faux donc il y a contradiction avec l'hypothèse et par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Le même type de raisonnement tenu en $-\infty$ donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
On en déduit que f(R)=R et que f est bijective

3 -

a- On a donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$
Soit g l'application définie sur [a, b] telle que g(x)=f(x)-x
g est continue , $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires , on sait qu'il existe un réel c sur l'intervalle [a, b] tel que g(c)=0 c'est à dire tel que f(c)=c C.Q.F.D.

b- On a , du fait de la croissance de f : $f(c)-f(a) = |f(c)-f(a)| \geq |c-a| = c-a$
Or , f(c)=c donc $f(a) \leq a$ et donc f(a)=a

De même , $f(b)-c = f(b)-f(c) = |f(b)-f(c)| \geq |b-c| = b-c \Rightarrow f(b) \geq b$ ce qui entraîne f(b)=b
Soit x un élément de [a , b], alors $f(x)-a = |f(x)-f(a)| \geq |x-a| = x-a$ donc $f(x) \geq x$
De même , $b-f(x) = |f(b)-f(x)| \geq |b-x| = b-x$ d'où $f(x) \leq x$
Par conséquent f(x)=x pour tout x de [a , b]

c- Soit g la fonction définie sur R par g(x)=a+ b- f(x)
Dans ces conditions , g est continue et pour tout (x , y) élément de R² , $|g(x)-g(y)| \geq |x-y|$
Par ailleurs , $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a+b-f(x) \leq b \Rightarrow g([a,b]) \subset [a,b]$
Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question b) on a donc pour tout x de [a , b] g(x)=x soit, pour tout x de [a , b] f(x)=a+ b- x

4-

a- Soit x un réel strictement positif ,alors $f(x)-f(0) = |f(x)-f(0)| \geq |x-0| = x$ donc
$x + f(0) \leq f(x) < x$
On en déduit que pour tout x strictement positif , $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$
D'après le théorème d'encadrement , on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Soit (x , y) un élément de R² , $x \le y$ alors

$$f(y) - f(x) = \left| f(y) - f(x) \right| \ge \left| y - x \right| = y - x \Rightarrow f(x) - y \ge f(x) - x$$

On en déduit que la fonction qui à x associe f(x)-x est croissante sur R et comme elle est majorée par 0 , elle admet donc une limite en $+\infty$

b- Soit x un réel strictement négatif ,alors $f(0) - f(x) = \left| f(0) - f(x) \right| \ge \left| 0 - x \right| = -x$ donc $x < f(x) \le x + f(0)$

On en déduit que pour tout x réel strictement négatif , $1 + \frac{f(0)}{x} \le \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Comme précédemment , on montre que la fonction qui à x associe f(x)-x est décroissante sur R et qu'elle est minorée par 0 ,elle a une limite en $-\infty$

c- Si $A = \varnothing$,alors la fonction qui à x associe f(x)-x ne s'annule pas sur R et comme elle est continue , elle doit rester de signe constant
Donc ,pour tout x réel soit f(x)<x (cas a)) , soit f(x)>x (cas b))

PROBLEME III

1 -

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\sin x.dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}.\sin 2x.dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x.dx = \frac{4}{\pi}\left([x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2 - \frac{4}{\pi}$$

2 -

a- $$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos p(x+\pi) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x+\pi)}{2\sin\frac{x+\pi}{2}} = (-1)^n \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}$$

b- $$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x-\frac{x}{2})}{\sin x}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x.\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}.\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}\cos px-(-1)^n(\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^p.\cos px)$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})+\sum_{p=1}^{n}\cos px(1+(-1)^{n+p+1})$$

c- On a , pour tout entier p>0 :

$$I_p=\left(\left[x\frac{\sin px}{p}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin px}{p}dx\right)=\frac{\pi}{2p}\sin p\frac{\pi}{2}+\frac{\cos p\frac{\pi}{2}-1}{p^2}$$

Si p=2q , on a $I_{2q}=\frac{(-1)^q-1}{4q^2}$

Si p=2q+1 , $I_{2q+1}=\pi\frac{(-1)^q}{2(2q+1)}-\frac{1}{(2q+1)^2}$

d- On utilise la question b) et on obtient

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\frac{\sin nx}{\sin x}.dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}(1+(-1)^{n+1})dx+\sum_{p=1}^{n}(1+(-1)^{n+p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos px.dx\right)$$

$$b_n=\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{n+1})+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{n}(1+(-1)^{n+p+1})I_p$$

Si n=2k+1 , $b_{2k+1}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{2k+1}(1+(-1)^p)I_p=\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k}I_{2q}$ car $1+(-1)^p=\begin{cases}0 sip=2q+1\\2sip=2q\end{cases}$ et si Si

Si n=2k , $b_{2k}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{2k}(1+(-1)^{p+1})I_p=\frac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{k-1}I_{2q+1}$

3 -

a- La fonction f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$;sa série de Fourier est convergente en tout point x de ces intervalles vers f(x)

Au point 0 , f admet une limite à droite : $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ et admet une limite à gauche $f(0^-) = -1$ puisque la fonction est impaire.

De $\frac{f(x)-f(0^+)}{x} = \frac{x-\sin x}{x.\sin x} \approx \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}$,on déduit que $f_d^{'}(0^+) = 0$

On obtient facilement que $f_d^{'}(0^-) = 0$ pour des raisons de symétrie.

Alors ,la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-)) = 0$

Au point $\frac{\pi}{2}$, on a $f(\frac{\pi}{2}^+) = 0;\ f(\frac{\pi}{2}^-) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2};\ f_g{}'(\frac{\pi}{2}^-) = 1;\ f_d{}'(\frac{\pi}{2}^+) = 0$

La série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(0+\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$

Au point π ,aucun problème car la fonction est nulle sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

b- On a $\frac{x}{\sin x} = b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}.\sin 2kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\sin(2k+1)x$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Si $x = \frac{\pi}{2}, \sin 2k\frac{\pi}{2} = 0$;il reste $b_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

c- (R_k) est une suite positive ,décroissante , de limite nulle car c'est le reste d'une série convergente .On a :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k} I_{2q}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k}\frac{(-1)^q-1}{4q^2}$$

$$0 = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{q=2p+1}^{k}\frac{-2}{(2p+1)^2}\right) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{(2p+1)^2}\right)$$

$$0 = \sum_{k\geq 1}(-1)^k R_k$$