Fomesoutra.com
ça soutra !

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

PROBLEME N° 1

Pour tout n entier naturel , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$$

❶ Montrer que pour tout n entier naturel $I_n = J_n$

❷ Montrer que $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

❸ Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}

❹ Calculer I_0 et I_1 et en déduire les expressions de I_n pour n pair et n impair

❺ Montrer sans utiliser les expressions trouvées de I_n que pour tout n entier naturel $I_{n+1} \leq I_n$ et que

$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Donner un équivalent de I_n

❻ Montrer que pour tout t élément de $\left[0;\sqrt{n}\right]$, $0 \leq (1-\frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$ et que pour tout t réel ,

$$e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}.$$

Déduire à l'aide de ce qui précède $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

PROBLEME N° 2

Soit f une fonction définie et continue sur R vérifiant : $\forall (x,y) \in R^2, \left|f(x)-f(y)\right| \geq \left|x-y\right|$

❶ Montrer que f est strictement monotone

❷ En supposant que f est strictement croissante , montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

En déduire que f est une bijection de R sur R

❸ On suppose ici qu'il existe (a, b) appartenant à R² ,a<b tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$

a - Montrer qu'il existe c élément de [a, b] tel que f(c)=c

b - On suppose f croissante ,montrer que f(a)=a et que f(b)=b et en déduire la forme de $f_{|[a,b]}$

c - On suppose f décroissante ,déterminer $f_{|[a,b]}$

Fomesoutra.com
ça soutra !

❹ On suppose dorénavant que f est croissante

a - On suppose que pour tout x réel ,f(x)<x

b - Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Montrer que et que f(x)-x a une limite quand x tend vers $+\infty$

Que peut-on dire si pour tout x réel, f(x)>x ?

c - Soit $A = \{x \in R | f(x) = x\}$ montrer que si $A = \varnothing$ alors on est dans un des cas a) ou b)

PROBLEME N° 3

On considère une fonction impaire f , de période 2π , définie par : $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ si $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et f(x)=0 si $x \in \{0\} \cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

❶ Calculer les coefficients de Fourier b_1 et b_2

❷ On rappelle que $\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos px = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

a - Calculer $\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \cos px$

b - En déduire que $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1}) + \sum_{p=1}^{n}(1+(-1)^{n+1+p})\cos px$

c - On pose $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos pxdx$;calculer cette intégrale selon la parité de p

Fomesoutra.com
ça soutra !

d - Démontrer que $b_{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k} I_{2q}$ pour $k \geq 1$;Calculer b_{2k}

❸-

a - Etudier la convergence de la série de Fourier de f

b - En déduire que $\frac{\pi}{4} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_{2k+1}$

c - On admet que $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$;on pose $R_k = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^{k}\frac{1}{(2p+1)^2}$

Démontrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_k$ converge et calculer sa somme en utilisant la question 3.