## CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

## VOIE B

## AVRIL 2001

## OPTION MATHEMATIQUES

## CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

### EXERCICE

**I-** En utilisant les formules de dérivées relatives au logarithme et à la tangente , il vient immédiatement :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

**II-**



$$I_0(x) = \int dx = x + C$$

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$$

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

**III -** Pour n>1 , on écrit $I_n(x) = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} . \frac{dx}{\cos^2 x}$

Intégrons par parties en posant

$$u(x) = \cos^{2-n} x, v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u'(x) = (n-2)\cos^{1-n} x . \sin x, v(x) = \tan x$$

Ainsi :

$$I_n(x) = \cos^{2-n} x \tan x - (n-2)\int \tan x \cos^{1-n} x \sin x dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\left[I_n(x) - I_{n-2}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow I_n(x) = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}(x)$$

**IV-** $I_3(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

## PROBLEME I

**I-**

Au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow e^x \tan x = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$



**II-**

**1-** $f'(x) = e^x \tan x + e^x(1+\tan^2 x) > 0$ puisque u²+u+1 n'a pas de racine réelle et est toujours positif.

f est donc strictement croissant de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[ \to R$

Nous savons alors que f admet une fonction réciproque g définie et croissante sur R telle que g(0)=0

Par ailleurs , f étant formée de fonctions indéfiniment dérivables sur I est elle-même indéfiniment dérivable sur I.

**2-**Nous avons vu que f admet une fonction réciproque g.

Si t =f(x) $\leftrightarrow$ x= g(t) on a $g'(t) = \dfrac{1}{f'(g(t))}$ définie sur R puisque f'(x)>0 , $g''(t) = -\dfrac{f''(g(t))}{f'^2(g(t))}\dfrac{1}{f'(g(t))}$ ,elle même encore dérivable ,et ainsi de suite :g(t) est donc indéfiniment dérivable sur R puisqu'il en est ainsi de f'(x) par rapport à x.

Donc g(t) admet des développements limités de tous ordres quand t tend vers 0 , donnés théoriquement par la formule de Mac Laurin Young :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + ... + \frac{t^n}{n!}g^{(n)}(0) + o(t^n)$$

On a g(0)=0, $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$ ,le développement de g est donc de la forme : $g(t) = t + at^2 + bt^3 + o(t^3)$

Plus simplement que la formule Mac-Laurin , nous obtiendrons a et b en écrivant que f(g(t))=t d'où :

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= g(t) + g^2(t) + \frac{5}{6}g^3(t) + o(t^3) \\ &= t + at^2 + bt^3 + (t^2 + 2at^3) + \frac{5}{6}t^3 + o(t^3) \\ &= t + (a+1)t^2 + (b + 2a + \frac{5}{6})t^3 + o(t^3) = t \end{aligned}$$

d'où par identification : $g(t) = t - t^2 + \dfrac{7}{6}t^3 + o(t^3)$ (1)

**III-1- et 2-**



$e^{n\pi+\alpha_n}\tan\alpha_n = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha_n}\tan\alpha_n = e^{-n\pi} \Leftrightarrow \alpha_n = g(e^{-\pi n})$ puisque $\alpha_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

**3-**Quand $n \to +\infty, e^{-n\pi} \to 0, \alpha_n \approx e^{-n\pi}$ d'après (1)

**4-** Si on pose $t = e^{-n\pi}$ alors $\beta_n = e^{2n\pi}(\alpha_n - e^{-n\pi}) = \dfrac{1}{t^2}[g(t) - t]$

Si $t = e^{-n\pi} \to 0, g(t) - t \approx -t^2$ d'après (1) et $\beta_n \to -1 = l$

Enfin , $\beta_n - l = \beta_n + 1 = \dfrac{1}{t^2}[g(t) - t + t^2] \approx \dfrac{1}{t^2}\dfrac{7}{6}t^3 = \dfrac{7}{6}t \Leftrightarrow \beta_n - l \approx \dfrac{7}{6}e^{-n\pi}$

**IV-**

**1-**Si f est indéfiniment dérivable sur I et f'(0) différent de 0, f' est continue sur I et il existe un voisinage de 0,soit $J = ]\alpha,\beta[, a \le \alpha < 0 < \beta \le b$ sur lequel f' garde un signe constant , celui de f'(0)
Donc f est strictement monotone sur J et admet une fonction réciproque g.

En raisonnant comme précédemment , $\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g''(t) &= -\frac{f''(x)}{f'^3(x)} \end{aligned}$ … et ainsi de suite.

g est donc indéfiniment dérivable sur $\left]f(\alpha); f(\beta)\right[$,g(0) est nul puisque f(0)=0 implique que 0=g(0) et g admet des développements limités de tous ordres :

$$g(t) = b_1 t + b_2 t^2 + .... + b_n t^n + o(t^n)$$



**2-**Pour obtenir les coefficients du développement de g , il suffit d'identifier avec les coefficients du développement limité de f(g(t)), d'où

$$f(g(t)) = a_1(b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n) + a_2(b_1^2 t^2 + 2b_1 b_2 t^3 + ...) + ... + a_n b_1^n t^n + o(t^n) = t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_1 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer de proche en proche : $\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{a_1} \\ b_2 = -\dfrac{a_2}{a_1^3} \\ . \\ . \\ . \\ . \end{cases}$

# PROBLEME II

**I-**La relation de récurrence donne pour n=1 : $u_2 = u_1 - 2u_1^3 = u_1(1-2u_1^2)$

Puisque $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a $0 < 1-2u_1^2 < 1$ donc $0 < u_2 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En raisonnant par récurrence et en supposant $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}, n \geq 1$ ,on a donc $0 < u_n^2 < \frac{1}{2}, 0 < 1-2u_n^2 < 1$

d'où encore $0 < u_{n+1} = u_n(1-2u_n^2) < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La suite $(u_n)$ est donc décroissante ,minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$.Elle est convergente et a pour limite

$l \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

La fonction f telle que $f(x) = x - 2x^3$ étant continue ,la relation de récurrence nous donne pour $n \to +\infty$
$l = l - 2l^3$ soit l=0



**II-**

**1-**
$$V_n = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} + .... + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1}$$

Quand $n \to +\infty, u_{n+1} \to 0^+, \frac{1}{u_{n+1}} \to +\infty, V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n \to +\infty$

**2-** $v_n = \frac{1}{u_n - 2u_n^3} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-2u_n^2)}{u_n(1-2u_n^2)} = \frac{2u_n}{1-2u_n^2}$, puisque $u_n \neq 0$.

On sait que $0 < u_n < u_1 \Rightarrow 0 < u_n^2 < u_1^2, -u_n^2 > -u_1^2, 1-2u_n^2 > 1-2u_1^2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1-2u_n^2} < \frac{1}{1-2u_1^2}$ et

$0 < v_n < \frac{2}{1-2u_1^2}u_n$.

On en déduit $u_n > kv_n$ avec $k = \frac{1-2u_1^2}{2} > 0$ d'où $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n > kV_n$ avec $V_n \to +\infty$.

Il s'ensuit que $S_n \to +\infty$.

**III-** $w_n = \dfrac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \dfrac{u_n^2 - u_n^2(1-2u_n^2)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \dfrac{1-(1-2u_n^2)^2}{u_n^2(1-2u_n^2)^2} = 4\dfrac{(1-u_n^2)}{(1-2u_n^2)^2}$

Pour $n \to +\infty, u_n \to 0 \Rightarrow w_n \to 4$.

**IV-**

**1-**Rappelons :

Si $a_n = l + \alpha_n$ alors $b_n = l + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ .Or $\alpha_k \to 0$ et il suffit de démontrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \to 0$

Pour $n \geq n_0 + 1, s_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\alpha_k$



$\left|S_n\right| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}\left|\alpha_k\right| + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\left|\alpha_k\right|$

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \left|\alpha_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ , alors $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\left|\alpha_k\right| < \dfrac{n-n_0}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_1 / n \geq n_1 \Rightarrow \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}\left|\alpha_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}, n_0$ étant fixé.

Donc $n \geq n_2 = \sup(n_0, n_1) \Rightarrow \left|S_n\right| < \varepsilon$ et $S_n \to 0$ .Ainsi ,

$\alpha_n \to 0 \Rightarrow b_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \to l$

**2-**Appliquons ce résultat à la suite $(w_n)$ ;puisque $w_n \to 4, z_n = \dfrac{1}{n}(w_1 + w_2 + ... + w_n) = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{u_n^2 - u_1^2}) \to 4$

Or $u_{n+1}^2 \to 0^+, \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_1^2} \approx \dfrac{1}{u_{n+1}^2}$ quand $n \to +\infty$ .

Donc $nu_{n+1}^2 \approx \dfrac{1}{4}, u_{n+1}^2 \approx \dfrac{1}{4n} \approx \dfrac{1}{4(n+1)}$ ou $u_n^2 \approx \dfrac{1}{4n}$

Comme $u_n > 0$, on en déduit : $u_n \approx \dfrac{1}{2\sqrt{n}}, n \to +\infty$