

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Notation : Dans l'exercice ,on notera $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de $f(x)$ sur l'intervalle I donné



Soit $I_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n \in \mathbb{N}$ une fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

I- Calculer la dérivée de la fonction de la variable réelle x définie sur I par $f(x) = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$

II- Calculer $I_0(x), I_1(x), I_2(x)$

III- A l'aide d'une intégration par parties , établir une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-2}(x)$

IV- En déduire $I_3(x)$

PROBLEME I

I- Former le développement limité , à l'ordre 3 quand x tend vers 0 de : $e^x \tan x$

II- On considère la fonction f définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = e^x \tan x$

1-Montrer que sur I , f est indéfiniment dérivable et $f'(x)$ toujours positif.

2-En déduire que f admet une fonction réciproque notée $g(t)$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et admettant des développements limités de tous ordres lorsque t tend vers 0.

3-Former le développement de g à l'ordre 3



III- Soit n un entier naturel.

1-Montrer que sur l'intervalle $\left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$, l'équation $e^x \tan x = 1$ admet une racine et une seule que l'on notera $n\pi + \alpha_n$.

2-Exprimer α_n à l'aide de la fonction définie ci-dessus.

3-Montrer que $\alpha_n \approx e^{-n\pi}$ quand $n \rightarrow \infty$

On pose $\beta_n = e^{2n\pi} (\alpha_n - e^{-n\pi})$.

4-Montrer que β_n a une limite finie l que l'on calculera .Trouver un équivalent de $\beta_n - l$

IV- Plus généralement , soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$, $a < 0 < b$ et telle que $f(0)=0$ et $f'(0) \neq 0$.

1-Montrer que f admet , sur un intervalle $J =]\alpha; \beta[$, $\alpha < 0 < \beta$, une fonction réciproque g et que cette dernière admet des développements limités de tous ordres au voisinage de 0.

2-Indiquer une méthode permettant d'obtenir le développement limité à l'ordre n de $g(t)$, connaissant celui de $f(x)$ au même ordre n .

PROBLEME II

I- Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ où u_1 est donné avec $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.



1-Montrer que pour tout $n > 0$, on a : $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$

2-Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et trouver sa limite.

II- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ pour $n > 0$.

1-Montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ tend vers $+\infty$.

2-Montrer que $v_n \leq \frac{2}{1-2u_1^2} u_n$ et en déduire le comportement de la suite de terme général $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

III- Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par : $w_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge vers 4.

IV-

1-Montrer que si une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite l , la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ converge aussi vers l .

2-En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} \cdot u_n = 1, (\Leftrightarrow u_n \approx \frac{1}{2\sqrt{n}})$