ÈAOLA NATIONALA SUPÈRIAURA AA STATISTIQUA
AT A'ÈAONOMIA APPLIQUÈA
AAIAJAN

AVRIL 2002

AONAOURS A'ÈLÈVA INAÈNIAUR AAS TRAVAUa STATISTIQUAS

VOIA A Optæn Mataématæquas

AORRIAÈ AA LA PRAMIÈRA ÈPRAUVA AA MATHÈMATIQUAS

PROALÈMA N⁰1

1. La résultat ast vraapour n 4 0. Supposons qua 4

$$0 \geq x_n \geq \sqrt{4} \qquad \text{at} \qquad 0 \geq y_n \geq \sqrt{14},$$

On a alors 4

$$x_{n+1}\ 4\ \sqrt{4-y_n} \geq \sqrt{4},$$

at 4

$$y_{n+1}\ 4\ \sqrt{4+x_n} \geq \sqrt{4+\sqrt{4}} \geq \sqrt{4+4}\ 4\ \sqrt{14},$$

2. 4omma x_{n+1}^2 4 $4-y_n$, on a aæn la résultat aamanaé.

3. x_{n+1} ast posatæaona $x_{n+1}+2$ 4 $|x_{n+1}+2| \geq 2$. 4'où 4

$$|x_{n+1}-2|\ 4\ \left|\frac{3-y_n}{x_{n+1}+2}\right| \geq \frac{1}{2}|y_n-3|\,,$$

4. On ramarqua a'aaora qua 4

$$y_{n+1}-3\ 4\ \frac{x_n-2}{y_{n+1}+3},$$

puæ qua $|y_{n+1}+3| \geq 3$, aa quaaonna la résultat.

4. 4 a 3. at 4., on aéauæ 4

$$|x_{n+1}-2| \geq \frac{1}{4}|x_{n-1}-2|\,,$$

4omma $\frac{1}{4}$, 1, on a aæn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 4 2. 4n ramplaçant aans l'axprassæn aa y_n, on aéauæ qua $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 4 $\sqrt{4}$ 4 3,

PROELÈME N^{0}2

1. : n 0, $\dfrac{d^t}{t} \leq \dfrac{1}{t}$ aont l'antéarala aavaraa an 0. . n'ast aona pas aéflnaa pour $x \leq 0$. $\dfrac{d^t}{t}$ étant aontanua sur $\mathbb{R}_+^*$ l'antéarala ast aéflnaa pour tout x . 0. : analamant, la aomaana aa aéflnataon aa . ast $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) On montra par réaurranaa qua, pour tout antaar n, . $^{(n)}(t) = \dfrac{d^t P_n(t)}{t^n}$ où $P_n(t)$ ast un polynôma aa aaaré anéraaur où éaal à $n-1$.

   (a) On saat, par aéflnataon, qua :

$$\forall x \,.\; 0. \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

   : ona :

$$.\,(x) - \ln x = \int_1^x \frac{d^t - 1}{t}\, dt.$$

   $d^t - 1$ ast posataapour tout t posataa : ona . $(x) - \ln x$ ast straatamant posatava sur $]1.+\infty]$ (antéarataon a'una aonataon posatava sur un antarvalla aroassant non réauat à un poant), straatamant néaatava sur $]0.1]$ (antéarataon a'una aonataon posatava sur un antarvalla aéaroassant non réauat à un poant) at nulla an 1.

   (a) On an aéauat aasémant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} .\,(x) = -\infty$ at $\lim\limits_{x\to+\infty} .\,(x) = +\infty$.

   (a) . ast aéravaala sur $\mathbb{R}_+^*$ aar $\dfrac{d^t}{t}$ ast aontanua sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa aéravéa vaut aona $.\,'(t) = \dfrac{d^t}{t}$, quaast posatava sur $\mathbb{R}_+^*$. . ast aona aroassanta sur $\mathbb{R}_+^*$.

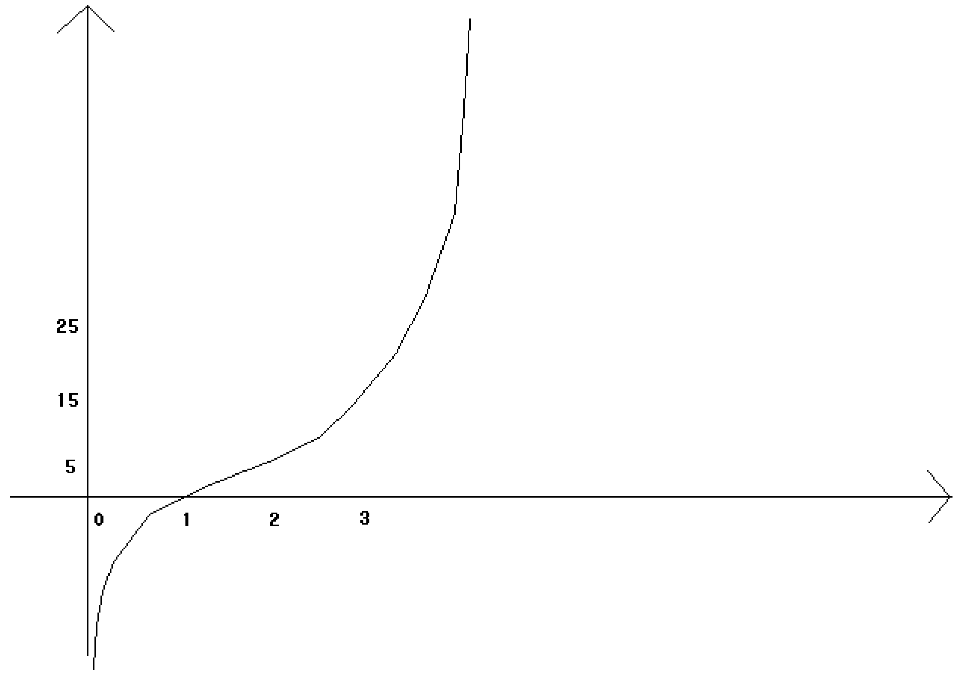
3. (a) $d^{\frac{t}{2}}$. t aès qua t . 0 a'où la résultat.

   (a) On an aéauat qua :

$$.\,(x) \leq \int_1^x d^{\frac{t}{2}}\, dt = 2(d^{\frac{x}{2}} - d^{\frac{1}{2}}).$$

   . a aona una aranaaa anflnaa paraaolaqua aa aaraataon Oy.

   (a) $.\,''(t) = d^t \left)\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\right)$. (1,0) ast aona la saul poant a'anflaxaon aa . (poants aont las aasaassas sont las zéros aa . $''$).



([ )

: [[ur[1: : r[p[[[[.

PROELÈME N^{0}3

1. So[[nt g_1 [t g_2 [[ux [on[t[ons [ont[nu[s sur]0. 1]. Il [st [l[[r qu[

$$g_1(x) + g_2(x) \geq \sup_{x\in]0,1]} g_1(x) + \sup_{x\in]0,1]} g_2(x).$$

   : n p[ss[nt [lors [u sup, on [l[résult[t.

2. So[t $u \geq 0$. $g(x) + ug(x)$ [st un[[on[t[on [ont[nu[[[l[v[r[[[l[x. : [tt[[on[t[on [st [on[[orné[sur]0. 1], [[qu[[mpl[qu[qu[$\sup_{x\in]0,1]} (g(x) + ug(x))$ [st fin[.

3. ([ ) P[r [éfin[t[on [[l'[n[, pour tout x [[[0,1[, $\underset{y\in]0,1]}{]n]} g(y) \geq g(x)$. : on[pour tout $u \geq 0$, $\underset{y\in]0,1]}{]n]} g(y) + ug(x) \geq g(x) + ug(x)$. : n p[ss[nt [u sup [[ns [[tt[[[rn[èr[[xpr[ss[on, on trouv[:

$$\sup_{x\in]0,1]} \Big) \underset{y\in]0,1]}{]n]} g(y) + ug(x) \Big) \geq g(u).$$

M[[s $\underset{y\in]0,1]}{[n[}\, g(y)$ [st [n[ép[n[[nt [[x [on[4

$$\sup_{x\in]0,1]} \Big) \underset{y\in]0,1]}{[n[}\, g(y) + ug(x)\Big) = \underset{y\in]0,1]}{[n[}\, g(y) + \sup_{x\in]0,1]} (ug(x)),$$

4 omm[u [t g sont pos[t[[s 4

$$\sup_{x\in]0,1]} (ug(x)) = u \sup_{x\in]0,1]} (g(x)),$$

4 [n[l[m[nt 4

$$\underset{y\in]0,1]}{[n[}\, g(y) + u \sup_{x\in]0,1]} g(x) \geq g(u),$$

qu[[st l[résult[t [[m[n[é (pu[squ[x [t y sont [[s v[r[[[l[s mu[tt[s).

([ ) Il [st [l[[r qu[pour tout x [[ ]0, 1[[t tout $u \geq 0$ 4

$$g(x) \geq \sup_{y\in]0,1]} g(y) \quad [\text{t} \quad ug(x) \geq u \sup_{y\in]0,1]} g(y),$$

4 n [[out[nt [[s [[ux [né[[l[tés, on trouv[4

$$g(x) + ug(x) \geq \sup_{y\in]0,1]} g(y) + u \sup_{y\in]0,1]} g(y),$$

4 n p[ss[nt [nfin [u sup sur x, on o[t[[nt [[[n, pour tout $u \in [0, +\infty[$ 4

$$g(u) \geq \sup_{y\in]0,1]} g(y) + u \sup_{y\in]0,1]} g(y),$$

([) 4 '[près ([ ) [t ([ ), on [4

$$\underset{x\in]0,1]}{[n[}\, g(x) + u \sup_{x\in]0,1]} g(x) \geq g(u) \geq \sup_{x\in]0,1]} g(x) + u \sup_{x\in]0,1]} g(x),$$

Il [st [lors [l[[r qu[4

$$\underset{u\to+\infty}{\mathrm{l[m}} \frac{g(u)}{u} = \sup_{x\in]0,1]} g(x),$$

([ ) Pour qu[g so[t [orné[sur $[0, +\infty[$, [l [st né[[ss[[r[qu[$\underset{u\to+\infty}{\mathrm{l[m}} \frac{g(u)}{u} = 0$. S[g [st [orné[, on [[on[$\sup_{x\in]0,1]} g(x) = 0$, so[t [n[or[(pu[squ[g [st [ont[nu[ ) g [st null[sur]0,1[. Ré[[proqu[m[nt, s[g [st null[sur]0,1[, g [st [onst[nt[é[[l[à $\sup_{x\in]0,1]} g(x)$, [ll[[st [on[[orné[.

4. ([ ) So[t $u' \geq u \geq 0$. g ét[nt pos[t[v[, [l [st [l[[r qu[pour tout x [[ ]0,1[4

$$g(x) + ug(x) \geq g(x) + u'g(x),$$

4 n p[ss[nt [u sup sur x, on trouv[[lors $g(u') \geq g(u)$, [[qu[[st l[[ro[ss[n[[[[g.

(a) Soat $u \geq u'$. Posons $g_1(x) = g(x)+ug(x)$ at $g_2(x) = (u'-u)g(x)$. 4 n applaquant la résultat au 1. on trouva aaan 4

$$g(u') \geq g(u) + (u'-u) \sup_{x\in]0,1]} g(x).$$

(a) Soat u at u_0 aans $\mathbb{R}_+$. Sa $u \geq u_0$, on saat a'après 4.(a) at 4.(a) qua 4

$$0 \geq g(u) - g(u_0) \geq (u-u_0) \sup_{x\in]0,1]} g(x).$$

Sa $u \geq u_0$, on a alors 4

$$0 \geq g(u_0) - g(u) \geq (u_0-u) \sup_{x\in]0,1]} g(x).$$

4 ans tous las aas, on a aona 4

$$0 \geq |g(u) - g(u_0)| \geq |u-u_0| \sup_{x\in]0,1]} g(x).$$

4 n aaasant tanara u vars u_0, on oataant aona $\lim_{u\to u_0} g(u) = g(u_0)$. g ast aona aontanua an tout poant u_0 aa $\mathbb{R}_+$.