

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES



PROBLÈME N°1

On considère les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0, \\ x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}, & y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n :

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leq y_n \leq \sqrt{14}.$$

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 2 = \frac{3 - y_n}{x_{n+1} + 2}.$$

3. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|.$$

4. Montrer de la même manière que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |x_n - 2|.$$

5. Dédurre de tout ce qui précède que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 3.$$

PROBLÈME N°2

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, lorsque cette intégrale existe.

1. Donner le domaine de définition de F .
2. (a) Montrer que F est continue et dérivable sur son domaine de définition.
(b) Montrer, par récurrence, que F est indéfiniment dérivable.
3. (a) On note $\ln$ le logarithme népérien. Étudier le signe de $F(x) - \ln x$. (On écrira $\ln x$ sous la forme d'une intégrale).
(b) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
(c) Dresser le tableau de variation de F .
4. (a) Vérifier que, $e^t > te^{\frac{t}{2}}$, si $t > 0$.
(b) En déduire l'étude de la branche infinie de F .
(c) Quels sont les points d'inflexion de F .
(d) Tracer la courbe représentative de F .



PROBLÈME N°3

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} (f_1(x) + f_2(x)) \leq \sup_{x \in [0,1]} f_1(x) + \sup_{x \in [0,1]} f_2(x).$$

2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et soit u un réel. Montrer que $\sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$ est fini.

Dans la suite de ce problème, on pose $h(u) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$, où f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$, et on cherche à étudier h sur $[0, +\infty[$.

3. On suppose en outre que g est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x) \leq h(u).$$

Indication : On pourra remarquer que pour tout x de $[0, 1]$,

$$\inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \leq f(x) + ug(x).$$

(b) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$h(u) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

(c) Déduire de (a) et (b) que $\frac{h(u)}{u}$ a une limite en $+\infty$ que l'on calculera.

(d) A quelle condition h est-elle bornée sur $[0, +\infty[$. Que vaut alors h ?

4. On suppose toujours que g est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que h est croissante.



(b) Soit $u \leq u'$. Montrer que :

$$h(u') \leq h(u) + (u' - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Indication : On pourra utiliser la question 1, avec deux fonctions f_1 et f_2 bien choisies.

(c) Conclure que h est continue sur $[0, +\infty[$.