ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PROBLÈME N^{0}1

1. (a) On le montre par récurrence. $u_0 > 0$. Supposons que pour un entier n positif, on a $u_n > 0$. On a alors $\ln(1+u_n) > 0$, soit $u_{n+1} > 0$.

   (b) Soit $g(x) = x - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$
   g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$. g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) g étant positive, on en déduit que pour tout entier n, on a :
$$u_n - u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n) \geq 0.$$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant alors une suite décroissante. Comme, d'après 1.(a), elle est minorée par 0, elle converge vers l tel que $g(l) = 0$. Or 0 est le seul point qui vérifie cela, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$, ce qui est le résultat demandé.

   (b) D'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est 1.

   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui décroît vers 0, donc d'après le théorème des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge.

3. (a) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, il est clair que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

(b) On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, quand x tend vers 0. Donc :

$$v_n = \frac{u_n}{\ln(1+u_n)} = \frac{u_n}{u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)} = \frac{1}{1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)} = 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n),$$

qui est le résultat demandé.

(c) D'après ce qui précède :

$$\ln v_n = \ln\left(1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right) = \frac{u_n}{2} + o(u_n).$$

Ces deux suites étant à termes positifs, on en déduit que $\sum \ln v_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{2}$ sont de même nature. Comme il est clair que $\sum \dfrac{u_n}{2}$ et $\sum u_n$ sont de même nature, on obtient le résultat.

(d) On a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln(v_0 v_1 \cdots v_{n-1}) = \ln\left(\frac{u_0 u_1 \cdots u_{n-1}}{u_1 u_2 \cdots u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_0}{u_n}\right).$$

(e) Comme u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0}{u_n} = +\infty$. On déduit donc de 3.(d) que $\sum \ln v_n$ diverge. Donc $\sum u_n$ diverge puisque ces deux séries sont de même nature.

PROBLÈME N^{0}2

1. (a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = a$ on a en particulier :

$$\exists A_a > 0,\ \forall x > A_a, \quad \frac{f(x)}{x} < a.$$

Comme x est positif, on a bien :

$$\exists A_a > 0,\ \forall x > A_a, \quad f(x) < ax.$$

(b) Soit $b > a$. On peut écrire :

$$f(x) - bx = f(x) - ax + (a-b)x.$$

D'après (a), pour $x > A_a$, $f(x) - ax$ est négatif, d'où :

$$\forall x > A_a, \quad f(x) - bx < (a-b)x.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (a-b)x = -\infty$, on a bien

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. En prenant $a = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $b = \varepsilon$, on a bien $b > a > 0$, le résultat est alors donné par ce qui précède.

2. (a) Soit $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$. f est alors positive sur $]0, +\infty[$ et vérifie bien, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$, en particulier $f(x) - \varepsilon x$ est négatif pour x assez grand, soit :

$$\exists A_\varepsilon > 0, \ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) - \varepsilon x < 0.$$

Enfin, comme f est positive, on a bien le résultat demandé.

(c) D'après 2.(b), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon > 0, \ \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

x étant positif, on conserve le sens de l'inégalité en divisant par x et on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon > 0, \ \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon,$$

qui signifie exactement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

3. (a) $\ln x$ est bien une fonction croissante vérifiant la propriété demandée.

(b) En refaisant le même raisonnement qu'au 2.(b), on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon > 0, \ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) < \varepsilon x.$$

Comme f est croissante, on a pour tout x positif, $f(0) \leq f(x)$. On a alors le résultat demandé :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon > 0, \ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En divisant par x, on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(0)}{x} = 0$. On déduit donc aisément de ce qui précède que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4. $f(x) = -x$.

(a) Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x - \varepsilon x) = -\infty$.

(b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x} = -1 \neq 0$.

(c) On en conclut que si f n'est ni positive ni croissante, le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$ n'entraîne pas nécessairement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Cette dernière propriété est donc plus forte puisque l'implication réciproque est toujours vraie.

PROBLÈME N^{0}3

On définit lorsque c'est possible :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u}\, du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2}\, du.$$

1. (a) Soit $u = \pi - y$. On a :

$$\cos u = \cos(\pi - y) = -\cos y = -1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Donc $\dfrac{\cos u}{1 + \cos u} \sim \dfrac{2}{y^2}$ quand $y = \pi - u$ tend vers 0. Or l'intégrale de $\dfrac{2}{y^2}$ diverge en 0, donc f n'est pas définie en π. On procède de la même manière pour g.

(b) Les intégrantes étant paires, on vérifie aisément que f et g sont impaires.

(c) Il est clair que f et g ne sont pas définies pour $x \geq \pi$, puisque l'on ne peut pas définir une intégrale sur un intervalle contenant un point où elle diverge. En tout point de $]0, \pi[$ les intégrales sont définies puisque les intégrantes sont continues. Enfin, par parité, on en déduit que le domaine de définition de f et g est $]-\pi, \pi[$.

(d) On sait classiquement que f et g sont dérivables sur $]-\pi,\pi[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x} \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}.$$

Ces fonctions étant des composées de fonctions indéfiniment dérivables sur $]-\pi,\pi[$ (fractions rationnelles et sin et cos), elles sont donc indéfiniment dérivables sur $]-\pi,\pi[$.

2. (a) On part de f. On intègre par parties en dérivant le terme $\dfrac{1}{1+\cos u}$ et en intégrant $\cos u$. On trouve alors :

$$f(x)=-g(x)+\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

(b) On a, pour tout u dans $]-\pi,\pi[$, $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = (1-\cos u)(1+\cos u)$. Donc :

$$\forall u \in]-\pi,\pi[, \quad \frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2}=\frac{1-\cos u}{1+\cos u},$$

d'où le résultat.

(c) La question 2.(a) donne la première ligne du système. On a :

$$\frac{1-\cos u}{1+\cos u}=1-2\frac{\cos u}{1+\cos u}.$$

La question 2.(b) donne donc :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad g(x)=\int_0^x du - 2f(x) = x-2f(x),$$

qui est bien la deuxième ligne du système.

(d) En soustrayant la première ligne à la deuxième, on trouve :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad f(x)=x-\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

En remplaçant cette valeur dans une des deux lignes, on obtient :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad g(x)=\frac{2\sin x}{1+\cos x}-x.$$

On remarquera que les fonctions f et g ne sont définies que sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ alors que, par exemple $x-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ est définie pour tout x non congru à π modulo 2π.