

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

PROBLÈME N°1



On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
(b) Étudier la fonction $g(x) = x - \ln(1 + x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite l que l'on déterminera .
2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
(b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
(c) Étudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.
3. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$.
(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.

(b) Montrer que :

$$v_n = 1 + \frac{u_n}{2}(1 + \varepsilon(n)), \quad \text{où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

(c) En déduire que les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont de même nature.

(d) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln \left(\frac{u_0}{u_n} \right)$.

(e) Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

PROBLÈME N°2



Dans tout le problème, f désigne une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

1. On suppose que f vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(a) Soit $a > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_a > 0$ tel que :

$$\forall x > A_a, \quad f(x) - ax < 0.$$

(b) En déduire que si $b > a$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

(c) Prouver finalement que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

2. On suppose que f est positive sur $]0, +\infty[$ et vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(a) Donner un exemple simple d'une telle fonction.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

3. On suppose maintenant que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(a) Montrer que $f(x) = \ln x$ est une telle fonction.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4. Soit $f(x) = -x$.

(a) Montrer que l'on a bien, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Quelle est la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Qu'en concluez-vous?

PROBLÈME N°3



Pour x réel, on pose, lorsque ces intégrales existent :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u} du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} du.$$

1. (a) Montrer que f et g ne sont pas définies en $x = \pi$.
(b) Montrer que f et g sont impaires sur leur domaine de définition.
(c) Dédurre de (a) et (b) que le domaine de définition de f et g est $] -\pi, \pi[$.
(d) Montrer que f et g sont indéfiniment dérivables sur $] -\pi, \pi[$.
2. (a) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre $f(x)$ et $g(x)$, pour tout x appartenant à $] -\pi, \pi[$.



(b) Montrer que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2} du = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} du.$$

(c) Dédire des deux questions précédentes que l'on a pour tout x dans $] - \pi, \pi[$:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ 2f(x) + g(x) = x \end{cases}$$

(d) En déduire les valeurs respectives de $f(x)$ et $g(x)$ sur $] - \pi, \pi[$.