ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$1^{ère}$ **COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**
(Durée de l'épreuve : 4 HEURES)

Calculatrice permise.
Les exercices et le problème sont indépendants et de difficultés diverses.

Exercice 1:

On considère la fonction

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

1) Etudier rapidement cette fonction sur $\mathbb{R}$ (Continuité, dérivabilité). La représenter (approximativement) sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$$

et

$$h(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

a) Montrer que $\lim_{x\to 0}(g(x)) = 0$. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour $x > 0$,

$$g(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |h(x)|.$$

En déduire la limite de $g(x)$ quand $x \to \infty$.

c) Déterminer la dérivée de $g(x)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction définie de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \tan(x) - x.$$

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < x < \varepsilon$ on a

$$\phi(x) \leq x^3.$$

b) Montrer que ϕ est bijective : on note $\psi = \phi^{-1}$ son inverse définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

c) Etudier la limite des suites $u_n = \psi(\frac{(-1)^n}{n})$ et $v_n = \psi(\frac{1}{n^3})$.

d) Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sont-elles convergentes?

e) Soit la suite à double indice définie par

$$u_{m,n} = \frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^m - \frac{1}{n+2}(\frac{n+1}{n+2})^m.$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = -1/2$. Que vaut $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}$?

Problème :

On utilise dans tout le problème les notations suivantes:
P_n^0 est l'ensemble des polynômes de [-1,1] dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n,
P_n est la partie de P_n^0 composée des polynômes de degré n,
$F[0,1]$ l'ensemble des fonctions de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in F$ dérivable m fois, $f^{(m)}$ désigne la dérivée d'ordre m.
$||.||$ est la norme sur P_n^0 définie par , pour $P \in P_n^0$, $||P|| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

Préliminaire :

1) Montrer par récurrence, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout n entier positif, on a

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

En déduire que

$$\sin(\frac{\pi}{2n}) \geq \frac{1}{n}.$$

Première partie : Les polynômes de Féjer-Tchebichev

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit T_n et U_n dans $F[0,1]$ par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T_{n+1}^{(1)}(x).$$

a) Calculer T_0 et T_1

b) Monter que T_n satisfait l'équation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(x)$ appartient à P_n, de coefficient dominant égal à 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

d) Calculer explicitement T_1, T_2, T_3, T_4, U_0, U_1, U_3, U_4.

2) Montrer que les zéros de T_n sont exactement les réels ordonnés par ordre strictement croissant,

$$\alpha_{k,n} = \cos(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi),\ k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

3) Montrer que $U_n(x)$ est un polynôme de P_n. Quel est son coefficient dominant? Montrer que U_n vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}.$$

4) Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n^{(1)}(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

En déduire une équation différentielle satisfaite par $U_n(x)$.

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{k,l} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_l(x)dx.$$

Montrer que ces intégrales impropres sont bien définies et que $I_{k,l} = 0$ pour $l \neq k$.
Calculer $I_{k,k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6) Déduire de ce qui précède une base orthonormée de P_n^0 pour le produit scalaire

$$< P, Q >_M = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P(x)Q(x)dx.$$

2ème Partie : Théorème de la Norme de Markov.

1) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||T_n||$ et $||U_n||$. Préciser en quels points le suprémum est atteint, respectivement pour T_n et U_n.

2) En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} \right| \leq n^2.$$

(Aide : on calculera la dérivée de $\log(T_n(x)) = \frac{T_n^{(1)}(x)}{T_n(x)}$).

3) Pour $0 \leq i \leq n-1$, on définit le ième polynôme interpolateur de Lagrange $L_{i,n-1}$ associé à $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, ..., \alpha_{n-1,n})$ comme l'unique polynôme de degré $n-1$ tel que $L_{i,n-1}(\alpha_{j,n}) = 0$, pour tout $i \neq j$ et $L_{i,n-1}(\alpha_{i,n}) = 1$. Expliciter sa forme et exprimer $\frac{T_n(x)}{x-\alpha_{k,n}}$ en fonction de $\mathrm{L}_{k,n-1}$.

On rappelle que si les réels $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, ..., \alpha_{n-1,n-1})$ sont tous différents $L_{0,n-1}, ...L_{n-1,n-1}$ forme une base de P_{n-1}^0.

4) Montrer les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) &= 2^n \Pi_{j \neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}) \\ &= (-1)^{k-n+1} \frac{n}{\sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}}. \end{aligned}$$

5) Montrer que, pour tout polynôme P dans P_{n-1}^0, on a la décomposition

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2} P(\alpha_{k,n}) \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} \ .$$

6) Déduire de ce qui précède que, pour tout P dans P_{n-1}^0 tel que $\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1$ on a $||P|| \leq n$.