CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice 1 (très facile)

a) On a trivialement

$$\begin{aligned} I_n(f) &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(f(x))\int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(f(x))\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(f(x))\,(\lim_{x\to\infty} Arc\tan(x) - Arc\tan(0)) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(f(x))\,\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) On a par simple changement de variable

$$\begin{aligned} I_n(f_0) &= \int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n(f_1) &= \int_0^{1}\frac{xn}{1+n^2x^2}dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{n}\frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2n}\log(1+n^2) \end{aligned}$$

c) On en déduit immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f_1) = 0$$

d) On a donc

$$S_n(f_0) = n\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f_0) = \infty.$$

e) Le terme générique de la série $S_n(f_1)$ est $I_n(f_1)$ qui est positif et tel que

$$I_n(f_1) \ge \frac{1}{n}.$$

Donc $S_n(f_1)$ diverge.

f) On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N, tel pour tout n>N

$$|I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| \le \varepsilon$$

On a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
|I_n(f)-\frac{\pi}{2}f(0)| &= |\int_0^{+\infty} f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx - \int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx| \\
&= |\int_0^{+\infty}(f(x)-f(0))\frac{n}{1+n^2x^2}dx| \\
&\leq \int_0^{\delta}|f(x)-f(0)|\frac{n}{1+n^2x^2}dx + \int_\delta^{\infty}|f(x)-f(0)|\frac{n}{1+n^2x^2}dx \\
&= I(\delta)+II(\delta),\ \text{pour tout } \delta>0
\end{aligned}$$

Par continuité de $f(x)$ en 0, on a pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que

$$I(\delta) \leq \varepsilon/2.$$

On a

$$II \leq 2\sup(f(x)\int_{n\delta}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx -> 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Donc pour δ fixé précédemment, il existe N tel que pour tout $n > N$, $II(\delta) \leq \varepsilon/2$ d'où finalement

$$|I_n(f)-\frac{\pi}{2}f(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour que la série converge, il faut nécéssairement que la limite soit nulle c'est à dire ici

$$f(0)=0.$$

g) On a $f_2(x) = \frac{x}{1+x} = 1-\frac{1}{1+x}$, qui est bien définie continue comme quotient bien définie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. On a $f_2'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f_2 est positive, croissante sur $\mathbb{R}^+$et sa limite en ∞, vaut 1, soit

$$0 \leq f_2(x) \leq 1.$$

$$I_n(f_2) = n\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)}dx,$$

mais

$$\frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)} = \frac{1}{1+n^2}(\frac{-1}{1+x}+\frac{n^2x+1}{1+n^2x^2}).$$

On en déduit pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^A(\frac{-1}{1+x}+\frac{n^2x+1}{1+n^2x^2}) &= -\log(1+A)+\frac{1}{2}\log(n^2A^2+1)+\frac{1}{n}Arctg(nA) \\
&= \log(\frac{n\sqrt{1+A^2}}{A+1})+\frac{1}{n}Arctg(nA)
\end{aligned}$$

d'où

$$I_n(f_2) = \frac{n}{1+n^2}(\log(n)+\frac{\pi}{2n}).$$

Comme $I_n(f) \sim \frac{\log(n)}{n}$ quand $n \to \infty$, on en déduit immédiatement que la série $S_n(f_2)$ est divergente.

h) Un exemple trivial est $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^+$. On a alors $I_n(f) = 0$ et $S_n(f) = 0$... Question subsidaire: est ce la seule solution possible?

Exercice 2

a) On a $f(t) = \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}$ qui est clairement paire. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ Comme en 0, $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ on peut clairement prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. f est alors continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[-\pi, \pi]$. Sur $\mathbb{R}^*$, $f(.)$ est infiniment dérivable et on a

$$f'(x) = (x(1+x^2))\cos(x) - (1+3x^2)\sin(x))/x^2(1+x^2)^2.$$

Quand $x \to 0$, on a clairement $f'(x) \sim (x(1+x^2)-(1+3x^2)x)/x^2 = -2x \to 0$ quand $x \to 0$. Donc $f\prime(x)$ est prolongeable par continuité en 0 et $f'(x)$ est donc dérivable sur $[-\pi, \pi]$

b) On a

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\, dt.$$

En $t = 0$, $\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \sim \frac{tx}{t(1+t^2)} \sim x$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Par ailleur en $+\infty$, $|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}| \leq \frac{1}{t(1+t^2)}$ qui est bien intégrable. On notera par ailleurs que F est impaire, il suffit donc de l'étudier pour $x \geq 0$,ce que l'on suppose dans la suite.

On a par ailleurs

$$|\sin(tx)| \leq |tx|$$

d'où

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty \frac{|x|}{(1+t^2)}\, dt = |x|\frac{\pi}{2}.$$

c) On pose

$$\Delta_h F = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)$$

on veut montrer que $\Delta_h F \to 0$ quand $h \to 0$. On a

$$\Delta_h F = \int_0^\infty \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}$$

On peut remarquer par un développement de Taylor que

$$\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx) = -t^2h^2/2\sin(\theta_{x,t})$$

pour $\theta_{x,t} \in (t(x+h), tx)$ et donc que

$$|\Delta_h F| \leq h/2 \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\, dt$$

qui malheureusement diverge en ∞. Il faut donc couper en deux bouts : on a pour tout $A > 0$

$$I(A) = |\int_0^A \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}| \leq h/2 \int_0^A \frac{t}{1+t^2}\, dt$$

mais par ailleurs, en remarquant que

$$|\sin(t(x+h)) - \sin(tx)| = |2\cos(tx+th/2)\sin(th/2)|$$

$$
\begin{aligned}
II(A) &= \int_A^\infty \left|\frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}\right| \\
&\leq \int_A^\infty \left|\frac{th/2}{ht(1+t^2)}\right| dt + \int_A^\infty \left|\frac{1}{(1+t^2)}\right| dt \\
&= 2(\frac{\pi}{2} - \arctan(A)) = \arctan(1/A) \to 0, \text{ quand } A \to \infty
\end{aligned}
$$

D' où pour tout $\varepsilon > 0$, il va exister $A > 0$ tel que

$$
II(A) \leq \varepsilon/2.
$$

Pour un tel A on a alors $I(A) \leq \varepsilon/2$ pour h suffisamment petit.

d) G est non seulement continue mais uniformément continue car elle est bornée par $\pi/2$. En effet on a

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt \\
&= \int_0^A \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt + \int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt
\end{aligned}
$$

et $|\int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt| \leq \arctan(1/A)$.La première partie est continue par définition de l'intégrale, bornée par $\pi/2$.

Si $G(.)$ est dérivable on peut s'attendre à ce que

$$
G'(x) = \int_0^\infty -\frac{t\sin(tx)}{1+t^2} dt
$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout B (et en particulier lorsque $B \to \infty$) on a par le théorème de la moyenne,

$$
\begin{aligned}
|\int_A^B -\frac{t\sin(tx)}{1+t^2} dt| &\leq \frac{A}{1+A^2} \int_A^C \sin(tx) dt \\
&\leq \frac{2A}{x(1+A^2)} \text{ pour } x \neq 0
\end{aligned}
$$

On procède alors comme dans c) en découpant la différence entre les accroissements et la valeur supputée de la dérivée en deux bouts. Cela marche bien si $x \neq 0$.

e) On remarque que G est paire, bornée. Aussi, si $G'(0)$ existe, on a nécessairement $G'(0) = 0$. On a alors par changement de variable,

$$
\frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{1-\cos(th)}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{1-\cos(u)}{h^2+u^2} du,
$$

qui est décroissante en h. Comme sa limite vaut 0 en ∞, on aurait alors $\int_0^\infty \frac{1-\cos(u)}{h^2+u^2} du = 0$ pour tout $h > 0$ ce qui est impossible (prendre par exemple h=1). Donc G n'est pas dérivable en 0.

f) D'après ce qui précède pour $x > 0$, on a

$$
F''(x) = \int_0^\infty \frac{-t\sin(tx)}{1+t^2} dt
$$

soit en utilisant la décomposition

$$
\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}
$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}dt + F''(x) \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt + F''(x) \\ &= \pi/2 + F^{''}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $x > 0$,

$$F(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x) + \pi/2$$

Comme on sait $F(x) \leq \pi/2x$, il vient immédiatement $\alpha = 0$ (prendre la limite quand $x \to \infty$). Comme F est continue nulle en 0, on obtient

$$F(x) = \frac{\pi}{2}(1 - \exp(-x)),\ x > 0.$$

g) Un raisonnement similaire conduit pour $x < 0$ à

$$F(x) = -\frac{\pi}{2}(1 - \exp(x)),\ x < 0$$

On déduit de ces deux résultats que

$$G(x) = F^{'}(x) = \frac{\pi}{2}\exp(-|x|),$$

qui n'est effectivement pas dérivable en 0.

Problème

Préliminaire :

Si on note $I = \int_0^1 f(t)dt$ alors, d'après le théorème de la moyenne, il existe $a \in [0,1]$, $I = f(a) \in]0,1[$. On peut dès lors appliquer l'inégalité donnée en $c = I$ et au point $f(x) \in]0,1[$ et on obtient, pour tout $x \in [0,1]$

$$\phi'(I^+)(f(x) - I) + \phi(I)) \leq \phi(f(x))$$

soit en intégrant entre 0 et 1 :

$$\phi'(I^+)(\int_0^1 f(x)dx - I) + \phi(I)\int_0^1 dx \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx)$$

$$\iff \phi(I) \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx),$$

qui est le résultat cherché.

Première partie

a) Il suffit de prendre $f(x) = x$, alors $\int_0^1 xdx = 1/2$ et d'utiliser le résultat précédent :

$$\phi(1/2) = \phi(\int_0^1 xdx) \leq \int_0^1 \phi(t)dt.$$

b) Soit $f_q(x) = \frac{1}{(x+q+1)\sqrt{x+1/2}}$, infiniment dérivable sur $]-1/2, \infty[$.On a

$$f_q'(x) = -\frac{1}{(x+q+1)^2\sqrt{x+1/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+q+1)(x+1/2)^{3/2}} < 0,$$

d'où par un calcul immédiat

$$f_q^{''}(x) > 0,$$

donc f_q est strictement convexe.

Mais, pour g convexe, on a simplement par translation du résultat a)

$$g(m) \leq \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt, \text{ pour } m \geq 1.$$

Il suffit en effet de poser $f(x) = g(x + (m - 1/2))$, alors f est aussi convexe et l'inégalité a) s'écrit

$$\begin{aligned} f(1/2) = g(m) &\leq \int_0^1 g(x + (m - 1/2))dx \\ &= \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt. \end{aligned}$$

En $m = 0$, il suffit de reprendre le a) lorsque l'intégral de f est faussement impropre en 0. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \phi'(I^+)(\int_\varepsilon^1 f(x)dx - I) + \phi(I)\int_\varepsilon^1 dx &\leq \phi(\int_\varepsilon^1 f(x)dx) \text{ soit} \\ \phi(I)(1-\varepsilon) + \phi'(I^+)(\int_\varepsilon^1 f(x)dx - I) &\leq \phi(\int_\varepsilon^1 f(x)dx) \end{aligned}$$

et en faisant tendre ε vers 0, si $\int_{->0}^1 f(x)dx$ existe alors on a encore

$$\phi(1/2) \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx)$$

et on peut appliquer le même argument que précédemment (translation).

c) On a donc

$$S_N(q) = \sum_{m=0}^{N} f_q(m).$$

On remarque $\int_{\to -1/2} f_q(x)dx$ est faussement impropre en -1/2. D'après b) et en remarquant que tous les termes de la somme sont positifs

$$0 < S_N(q) \leq \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx$$

On a alors par changement de variable $u = \sqrt{x + 1/2}$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx &= \int_0^{\sqrt{N+1}} \frac{2}{u^2 + q + 1/2} du \\ &< \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2 + q + 1/2} du \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}. \end{aligned}$$

Pour avoir un encadrement un peu plus précis que $[0, \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}}]$ etune borne inférieure non triviale, on peut, par exemple, conserver les premiers termes de la somme. On a par exemple

$$\frac{\sqrt{2}}{q+1} + \frac{\sqrt{2/3}}{q+2} < \lim_{N \to \infty} (S_N(q)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}$$

Deuxième partie

a) A N fixe, F et G sont visiblement continues car composée de fonction continues...

Donc, par continuité de G, l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{N=1},\ G(a) = \lambda\} = \{G^{-1}(\{\lambda\})\}$$

est compact car $\{\lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

b) Par continuité de F, F atteint forcément sont maximum sur un compact...

c) F et G étant également dérivable, le théorème des extrémas liés implique qu'il existe λ_0 tel que

$$\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda_0 \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}.$$

(λ_0 s'interprète comme le multiplicateur de Lagrange associé au Lagrangien $L = F(a) - \lambda_0 G(a)$ et la condition précédente est simplement la condition au premier ordre du théorème de Kuhn et Tucker). En effet, on a clairement (pour pouvoir appliquer ce théorème) $G^{'}(a^*) \neq 0$ car

$$\frac{\partial G(a^*)}{a_p} = 2a_p,$$

donc $G^{'}(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$.

L'égalité $\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}$ s'exprime alors sous la forme

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{a_m^*}{m+p+1} = 2\lambda_0 a_p^*.$$

On pose $\mu = 2\lambda_0$. On remarque alors que

$$\begin{aligned} M_\lambda &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{a_p^* a_m^*}{m+p+1} = \mu \sum_{p=0}^{N} a_p^* a_p^*. \\ &= \mu G(a^*) = \mu\lambda. \end{aligned}$$

d) Evident.

e)Quitte à échanger les signes, on peut supposer que au moins un a_i^* est strictement positif. Comme indiqué, on considère q l'entier tel que

$$\sqrt{q+1/2}\, a_q^* = \max_{r=0,\ldots,N} (\sqrt{r+1/2}\, a_r^*) \neq 0.$$

D'après c) on a

$$\begin{aligned} \mu a_q^* &= \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m^*}{m+q+1} \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m^* \sqrt{m+1/2}}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2}\, a_q^* \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2}\, a_q^* \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}} = a_q^* \pi. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mu \leq \pi$.

f) En rassemblant tous les résultats on obtient donc que pour tout $a \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$F(a) \leq M_\lambda = \mu G(a) \leq \pi G(a)$$

soit l'inégalité de Hilbert.