

AVRIL 2005

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Calculatrice permise.
Les exercices et le problème sont indépendants.



Exercice 1

Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$I_n(f) = \int_0^{+\infty} f(x) \frac{n}{1+n^2x^2} dx.$$

- a) Montrer que cette suite est bien définie et est bornée par $\pi/2 \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f(x))$.
- b) On pose $f_0(x) = 1$, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $I_n(f_0)$ et $I_n(f_1)$.
- c) Déterminer les limites respectives de $I_n(f_0)$ et $I_n(f_1)$, lorsque $n \rightarrow \infty$.
- d) On pose $S_n(f) = \sum_{k=1}^n I_k(f)$. Calculer explicitement $S_n(f_0)$ et sa limite quand $n \rightarrow \infty$.
- e) La série $S_n(f_1)$ est-elle convergente ou divergente?
- f) Montrer que de manière générale $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \frac{\pi}{2} f(0)$. En déduire une condition nécessaire pour que la série $S_n(f)$ soit convergente.
- g) On pose $f_2(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Vérifier que f_2 est bien continue bornée sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $I_n(f_2)$ et en déduire la limite de $S_n(f_2)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- h) Trouver une fonction f telle que $S_n(f)$ soit convergente.

Exercice 2

- a) Etudier la fonction de $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}.$$

On précisera en particulier si cette fonction est continue dérivable en 0.

- b) On pose

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie et que

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2}|x|.$$

c) Montrer que F est dérivable, de dérivée

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt.$$

Aide : on reviendra à la définition de la dérivabilité.

- d) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- e) Montrer que G n'est pas dérivable en 0.
- f) Expliciter cette dérivée et montrer que, pour $x > 0$, F vérifie l'équation différentielle,

$$F(x) - F''(x) = \pi/2.$$

En déduire l'expression de $F(x)$, $x > 0$. On rappelle que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

g) Même question que f) pour $x < 0$. En déduire la forme analytique de $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$.



Problème

Préliminaire: Dans tout le problème, ϕ est une fonction convexe de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que ϕ est alors continue, dérivable à droite sur $]0,1[$ et on a, pour tout x, c dans $]0,1[$,

$$\phi(x) \geq \phi(c) + (x - c)\phi'_d(c),$$

où $\phi'_d(c)$ est la dérivée à droite en c .

En déduire l'inégalité de Jensen suivante :

soit f continue de $[0,1]$ dans $]0,1[$ alors

$$\phi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leq \int_0^1 \phi(f(t))dt.$$

Première partie

a) Comparer $\phi(1/2)$ et $\int_0^1 \phi(t)dt$.

b) Soit q un entier strictement positif. Soit f_q l'application définie de $] -1/2, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_q(x) = \frac{1}{(x+q+1)\sqrt{x+1/2}}.$$

Montrer que f_q est strictement convexe (pour cela, calculer sa dérivée seconde). En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^+$,

$$f_q(m) \leq \int_{m-1/2}^{m+1/2} f_q(t)dt.$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour $m = 0$ (on vérifiera que l'intégrale est faussement impropre en $-1/2$).

c) On pose $S_N(q) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}}$. Dédurre des résultats précédents l'inégalité suivante

$$0 < S_N(q) \leq \int_0^{\sqrt{N+1}} \frac{2}{(t^2 + q + 1/2)} dt < \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}.$$

En déduire que S_N est convergente et donner un encadrement (non-trivial) de sa limite.

Deuxième partie



Soit $u_n, n \in \mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{m=0}^N u_m^2$ soit convergente de limite A . On se propose de démontrer, à l'aide de la partie précédente, l'inégalité dite de Hilbert

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{u_n u_m}{m+n+1} < A \pi. \quad (1)$$

On pose pour cela, pour $a = (a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$F(a) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{a_n a_m}{m+n+1},$$

$$G(a) = \sum_{m=0}^N a_m^2.$$

a) Montrer que F et G sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^{N+1}$ dans $\mathbb{R}^+$. En déduire que l'ensemble $\{a, G(a) = \lambda\}$ avec $\lambda \geq 0$ est un compact de $\mathbb{R}^{N+1}$.

b) Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$M_\lambda = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^{N+1} \\ G(a) = \lambda}} \{F(a)\}, \quad (2)$$

existe et est atteint.

c) En déduire que, au maximum, $a^* = (a_0^*, \dots, a_N^*)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \in \{0, 1, \dots, N\}$,

$$\sum_{m=0}^N \frac{a_m^*}{m+p+1} = \mu a_p^*.$$

et

$$M_\lambda = \mu \lambda.$$

d) Montrer que, si $\sum_{m=0}^N u_m^2 = 0$, alors l'inégalité de Hilbert (1) est vérifiée.

e) Montrer qu'il existe q tel que

$$\mu \leq \sqrt{q+1/2} \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}}.$$

Aide : Pour cela, on considérera a^ une solution de (2). Puis on supposera que l'un des termes de la série a^* , disons a_k^* , est strictement positif (quitte à échanger les signes) et on posera*

$$\sqrt{(q+1/2)a_q^*} = \max_{m \in \{0, \dots, N\}} (\sqrt{m+1/2}a_m^*) > 0.$$

f) En déduire l'inégalité de Hilbert (1).