CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente au voisinage de l'infini à $1/t^{4n}$: la règle de Riemann nous dit que l'intégrale converge si et seulement si $4n > 1$, donc converge pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, (1+t^4)^{n+1} \geq (1+t^4)^n$, donc $I_{n+1} \leq I_n$ et la suite (I_n) est positive décroissante, donc convergente.

3. $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t \times t^3/(1+t^4)^{(n+1)}\, dt$. On effectue alors une intégration par parties, en intégrant d'abord sur un segment $[0, X]$, puis en faisant tendre X vers $+\infty$. On obtient $I_{n+1} = I_n(4n-1)/4n$ et par récurrence le résultat s'en déduit immédiatement.

5. $\ln(4n-1)/4n = \ln(1-1/4n) \sim -1/4n$ est le terme général d'une série divergente. La série proposée étant à termes négatifs, elle est donc divergente vers $-\infty$.

6. Soit : $\ln I_n = \ln I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(4k-1)/4k \longrightarrow -\infty$ et donc $\lim I_n = 0$.

7. On a $S_n = \int_0^{+\infty} (\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 1/(1+t^4)^k) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-(-\frac{1}{1+t^4})^n}{2+t^4}\, dt$ d'où

$$S_n = \underbrace{\int_0^{+\infty} dt/(2+t^4)}_{A} + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^{+\infty} dt/\{(1+t^4)^n(2+t^4)}_{B_n}$$

Comme $0 \leq B_n \leq I_n$, on a $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$,on déduit que $\lim_{n\to\infty} S_n = A$. Par changement de variable $t = 2^{1/4}u$ on obtient $A = 2^{-3/4} I_1$.

Fomesoutra.com
ça soutra
Docs à portée de main

Exercice 2

1. On $P_1(t) = t + a$ avec $\int_{-1}^{1} (t+a)\, dt = 0$ d'où $a = 0$, donc $P_1(t) = t$. De même $P_2(t) = t^2/2 + b$ et $\int_{-1}^{1} (t^2/2 + b)\, dt = 0$ d'où $b = -1/6$ et $P_2(t) = t^2/2 - 1/6$.

2. On a pour $n \geq 2, P_n(1) - P_n(-1) = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)\, dt = 0$. Supposons P_n impair, alors P_{n+1} (primitive de P_n) est pair et P_{n+2} est de la forme $Q + b$, où Q est un polynôme impair et b une constante. La nullité de l'intégrale sur $[-1, 1]$ impose alors $b = 0$ et P_{n+2} est impair. Comme P_1 est impair, on conclut par récurrence que, pour tout n impair, P_n est impair (et donc si n est pair P_n, primitive de P_{n-1} est pair). Pour n impair, on a donc $P_n(-1) = -P_n(1)$ et comme on a remarqué que pour $n \geq 2$, $P_n(-1) = P_n(1)$, le résultat s'en suit.

3. Pour $n \geq 1$, on a $n + 1 \geq 2$ et en intégrant par parties,

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\, dt = [tP_{n+1}(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)\, dt = P_{n+1}(1) + P_{n+1}(-1)$$

On en déduit avec le début de la question 2 que

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\,dt = 2.P_{n+1}(1).$$

4. Cf. cours.

5.On obtient par intégration par parties $\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = [P_n(t)P_{m+1}(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt$. Si $n \geq 2$, alors $m+1 \geq 2$ et on a donc

$$\phi(P_n, P_m) = -\phi(P_{n-1}, P_{m+1}).$$

D'où, par récurrence, pour n,m>1

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}\phi(P_1, P_{m+n-1})$$

aussi valable pour $n = 1$. D'après la question 3, on a donc pour $m \geq n \geq 1$, $\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}P_{m+n}(1)$. Enfin, comme $n \geq 1$.

$$2\phi(P_n, P_0) = \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(-1) = 0.$$

6. E_n et F_n sont supplémentaires (car les polynomes $(P_0, \ldots, P_n)$ sont de dégrés différents et forme , donc une base de cet espace). Montrons que pour tout k et tout j, P_{2k} et P_{2j+1} sont ϕ-orthogonaux. Or d'après ce qui précède, $\phi(P_0, P_{2j+1}) = 0$ et pour $k \geq 1$, d'après 5. et 2., d'où

$$\phi(P_{2k}, P_{2j+1}) = (-1)^{2k-1}P_{2(k+j)+1}(1) = 0.$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Problème

Première Partie

(1) Si $0 \in K$, alors par linéarité $u(0) = 0$ et l'application u (linéaire) admet 0 comme point fixe dans K.

(2) On suppose désormais $0 \notin K$. Si $x \in K$, $u^j(x) \in K$ pout tout $0 \leq j \leq n-1$ et il s'ensuit par convéxité de K que $S_n(x) \in K$.

(3) Soit $x \in K$. D'après 2, $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(x) \in K$ et s'écrit $S_{n_1}(S_{n_2} \circ \cdots \circ S_{n_k})(x)$: il appartient donc à $S_{n_1}(K)$. Par ailleurs, comme les applications linéaires S_{n_j} commutent entre elles (ce sont des polynômes en u), il en va de même pour $S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}$ d'où l'inclusion.

S_n étant continue et K compact, les ensembles $S_n(K)$ sont eux aussi compacts et inclus dans K; si $A = \cap_{n\geq 1} S_n(K)$ était vide, il existerait $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre fini tels que $S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K) = \emptyset$. Or cette intersection contient l'image de K par $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}$ et ne peut donc pas être vide.

(4) Soit $a \in A$; pour tout n il existe $x_n \in K$ tel que $a = S_n(x_n)$. On va montrer que $u(a) = a$:

$$\begin{aligned} u(a) - a &= u(S_n(x_n)) - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)}{n} - \frac{x_n}{n} - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n) - nS_n(x_n) - x_n}{n} \\ &= \frac{u^n(x_n) - x_n}{n} \end{aligned}$$

Mais $||u^n(x_n) - x_n|| \leq d < +\infty$ puisque K compact est borné, et $||u(a) - a|| \leq \frac{d}{n}$ pour tout n donc $||u(a) - a|| = 0$ et $u(a) = a$.

Fomesoutra.com
ça soutra
Docs à portée de main

Deuxième Partie

(1) (i) si $x \in K$, $|| - x|| = ||x|| \leq 1$ et $-x \in K$ ce qui prouve (i).
(ii) K est convexe car, si $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, $||(1-\lambda)x + \lambda y|| \leq (1-\lambda)||x|| + \lambda||y|| \leq 1$ donc $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$.
(iii) K est fermé car toute boule fermée d'un espace métrique est fermée; et K est borné par définition.
(iv) 0 est un point intérieur de K : par ailleurs $B(0, \frac{1}{2}) \subset K$ et K contient donc un voisinage de 0.

(2) n est définie, positive, homogène, telle que $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et satisfait l'inégalité triangulaire $n(x_1 + x_2) \leqslant n(x_1) + n(x_2)$ pour tout x_1, x_2.

(3) Soit K vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii), (iv).
Montrons que -$p(x)$ est bien définie pour tout x
-que p est une norme
que K est la boule unité fermée qui lui est associée.

• Si $x = 0$, $\frac{x}{a} \in K$ pour tout $a > 0$ et $p(0) = 0$. Si $x \neq 0$, l'ensemble $\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in K\}$ est minoré; s'il est non vide, il admet une borne inférieure. Or 0 est point intérieur à K; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$ et pour a assez grand, $\frac{||x||}{a} \leq \varepsilon$, en particulier $\frac{x}{a} \in K$, et l'ensemble est non vide.

Vérifions maintenant les axiomes d'une norme.

• Par définition d'une borne inférieure, $p(x) = 0$ alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ 0 < a < \varepsilon$ tel que $\frac{x}{a} \in K$. K étant borné, on peut supposer que $K \subset \overline{B}(0, R)$, de sorte que pour x dans K, $||\frac{x}{a}|| \leq R$ ou $||x|| \leq \varepsilon R$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $x = 0$.

• Soit $\lambda > 0$; $p(\lambda x) = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{\lambda x}{a} \in K\} = \inf\{\lambda b > 0\ ;\ \frac{x}{b} \in K\}$ en posant $a = \lambda b$, et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Il suffit de montrer que $p(-x) = p(x)$ pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais $p(-x) = \inf\{a > 0\ ;\ -\frac{x}{a} \in K\} = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in -K\} = p(x)$ car K est symétrique.

• Fixons $\varepsilon > 0$ alors il existe $a > 0$ tel que $p(x) \leq a < p(x) + \varepsilon$ et $\frac{x}{a} \in K$, puis $b > 0$ tel que $p(y) \leq b < p(y) + \varepsilon$ et $\frac{y}{b} \in K$. Si $\frac{x+y}{a+b} \in K$, alors $p(x+y) \leq a + b$ par propriété de la borne inf et on aura prouvé $p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

4

Mais $\frac{x+y}{a+b}$ s'écrit $\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$, qui est la combinaison convexe de $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, et K est supposé convexe. L'inégalité triangulaire s'en déduit immédiatement en faisant tendre ε vers 0.

•Il reste à montrer que K est bien la boule unité pour cette norme $K = \{x\ ;\ p(x) \leq 1\}$.

Si $x \in K$ et $a = 1$, $\frac{x}{a} \in K$ ce qui implique $p(x) \leq 1$. Réciproquement si $p(x) \leq 1$; on peut supposer $x \neq 0$. Si $p(x) < 1$, il existe $p(x) \leq a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in K$; mais $x = a\frac{x}{a} + (1-a)0$ est encore dans K.

Si $p(x) = 1$ il existe (a_n) suite de nombres positifs tels que $\frac{x}{a_n} \in K$ pour tout n et tendant vers 1. Mais K étant fermé, $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$.