Avril 2007

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS B OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

1. Lorsque $0 \leq a \leq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $0 < k + a \leq k + 1$ et on en déduit

$$0 < \prod_{k=1}^{n}(k+a) \leq (n+1)!$$

d'où

$$u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la série $\sum u_n \geq \sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.

2. a) Montrons par récurrence sur n la relation, pour tout $n \geq 2$, $S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1} u_n$.

- pour $n = 2$, on a

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1}u_2 = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{2}{a+1}\right) = \frac{1}{a+1},$$
$$S_1 = u_1 = \frac{1}{a+1}.$$

- supposons la relation vérifiée pour tout $k \leq n-1$. Alors on a

$$\begin{aligned}
S_n = S_{n-1} + u_n &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}u_n + u_n \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+a)u_n + (a-1)u_n\right) \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)u_n\right) \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)\frac{(n+a+1)u_{n+1}}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1}.
\end{aligned}$$

b) La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que la suite des sommes partielles (S_n) reste majorée par $\frac{1}{a-1}$. Cette série est donc convergente et on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell \leq \frac{1}{a-1}.$$

c) Supposons que $\ell < \frac{1}{a-1}$. Dans ce cas, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+a}{a-1}u_n = \frac{1}{a-1} - \ell = \alpha > 0$$

et $u_n \sim \alpha$ ou $u_n \sim \frac{(a-1)\alpha}{n}$, ce qui entraînerait la divergence de la série $\sum u_n$. Ainsi, on en déduit $\ell = \frac{1}{a-1}$.

Exercice 2

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|e^{-x}\sin^{2n}x| \leq e^{-x}$, donc $|J_n| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}dt < \infty$, ce qui entraîne que J_n existe pout tout n.

b) On a directement $J_0 = 1$.

2) a) Soit $A > 0$. Par intégration par parties on a

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{2n} tdt = \left[-e^{-t}\sin^{2n} t\right]_0^A + 2n\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos tdt\ ,$$

d'où, en faisant tendre A vers l'infini, l'expression

$$J_n = 2n\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\ dt\ .$$

De nouveau par intégration par parties, on obtient

$$\frac{\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos tdt}{2n} = \left[-e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t\cos^2 t - \sin^{2n} t)dt$$

et donc, par passage à la limite quand A tend vers l'infini,

$$J_n = 2n((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n)$$

soit encore

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2}J_{n-1}\ .$$

b) On a par positivité de la fonction sous l'intégrale, $J_n \geq 0$ pour tout n. La relation obtenue en a) montre que la suite (J_n) est décroissante. La suite est décroissante et minorée donc convergente.

3) a) On a par un simple développement limité

$$\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \sim -\frac{1+2k}{1+4k^2} \sim -\frac{1}{2k}\ .$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$ est donc de même nature que $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ qui est divergente et de limite $-\infty$.

b) On a d'après 2)a) l'égalité $\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right).$$

On en déduit donc par sommation que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(J_k\right) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(J_{k-1}\right)\\ &= \ln J_n - \ln J_0 = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)\ .\end{aligned}$$

Cela entraîne que $\lim_{n\to+\infty} \ln J_n = -\infty$ donc que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

4) a) Soit $k \geq 0$. Alors par un simple changement de variable et en utilisant la périodicité de la fonction sin, on a

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi} \sin^{2n} u du \ .$$

On en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-u-k\pi} \right) \sin^{2n} u du \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1 - e^{-(N+1)u}}{1 - e^{-u}} e^{-u} \sin^{2n} u du \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sin^{2n} u du \\
&\leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} u du \ .
\end{aligned}$$

Ceci restant vérifier pour tout N, l'inégalité en découle par passage à la limite.

b) On va montré que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 0$. On a trivialement

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n} t dt \ .$$

Le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale permet d'écrire que $\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{2n} t dt \leq \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} dt \leq \varepsilon \ .$$

Par ailleurs, par croissance de la fonction sin sur $[0, \pi/2]$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^{2n} t dt \leq \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} \times \frac{\pi}{2} \ .$$

Comme $0 < \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) < 1$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$0 \leq \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} < \varepsilon.$$

Ceci entraîne que lorsque n tend vers l'infini, J_n tend vers 0.

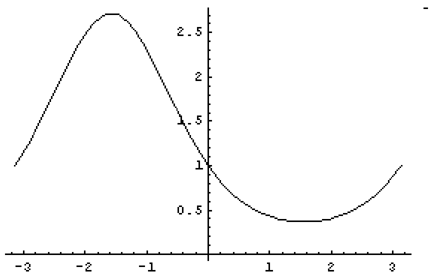
Problème

Première Partie

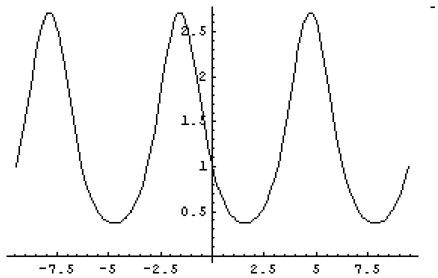
1) La fonction est clairement continue, infiniment dérivable par composition de fonctions infiniment dérivables. On a directement

$$f'(t) = -\cos(t)e^{-\sin(t)},$$

de signe inverse à $cos(t)$, le tableau de variation et le tracé de la fonction s'en déduisent immédiatement



Par périodicité de la fonction f (de période 2π) on en déduit le tracé sur $\mathbb{R}$ suivant



2) L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment $[0, u]$ donne

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \sup_{[0,u]} \left| \frac{d^2 \exp(t)}{dt^2} \right|.$$

Si $u > 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''(t)| = e^u$, si $u \leq 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''(t)| = e^0 = 1$, et dans les deux cas on a bien : $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

3) On pose

$$\Delta(h) = |\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t} \sin t \, dt|.$$

Soit en ramenant tout sous la même intégrale

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= |\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}(e^{-h\sin t} - 1 - h\sin t)\, dt| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}|e^{-h\sin t} - 1 - h\sin t|\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant 2) on obtient donc

$$\Delta(h) \leq \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\frac{h^2\sin^2 t}{2}e^{|h|\sin t}\,dt$$
$$\leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt \leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2}\varphi(x).$$

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit de 3)

$$|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} - e^{-x\sin t}\sin t\,dt| \leq \frac{1}{2}|h|e^{|h|}\varphi(x).$$

Comme $\lim_{h\to 0}|h|e^{|h|} = 0$, on en déduit que φ est dérivable au point x, avec

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\sin t\,dt.$$

Pour montrer que la dérivée seconde existe on peut mener à bien le même type de calcul sur φ (avec Taylor-Lagrange à l'ordre 2) ou en travaillant directement sur $\varphi'(x)$. Le même type de calcul montre que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\sin^2 t\,dt.$$

5) Les fonctions sous les intégrales étant positives, il est immédiat de montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$. Comme φ' est strictement croissante, on a, pour tout $x < 0$, $\varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$ d'où le résultat.

6) Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, on obtient directement $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ ($\sin(t)$ est au dessus de du segment qui relie les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ de pente $2/\pi$).

7) La fonction $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle s'annule donc en au plus un réel. On a de plus

$$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0 \text{ et } \delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0.$$

En effet, d'après ce qui précède

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin t}dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2t/\pi}dt = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}) < 1.$$

Il en résulte qu'il existe un unique α tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in]0,1[$.

8) D'après l'étude de la fonction f pour tout $\varepsilon > 0$ $\sup_{x\in[\varepsilon,\pi/2-\varepsilon]} f(x) = \delta(\varepsilon) < 1$. On en déduit que, pour $x > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t} = \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} (e^{-\sin t})^x dt + \int_0^\varepsilon (e^{-\sin t})^x dt + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} (e^{-\sin t})^x dt$$
$$\leq \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \delta(\varepsilon)^x dt + \int_0^\varepsilon 1dt + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} 1dt$$
$$\leq \delta(\varepsilon)^x \pi/2 + 2\varepsilon.$$

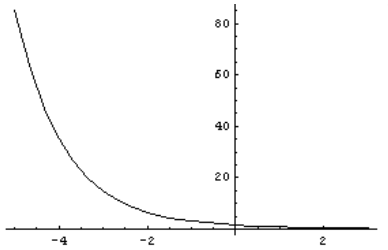
Lorsque $x \to +\infty$, le membre de droite peut être choisi arbitrairement petit et tend donc vers 0 d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Inversement on a $\inf_{x \in [0,\pi/2]} f(x) = \eta < 1$ et on obtient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \geq \int_0^{\pi/2} \eta^x dt = \eta^x \to +\infty \text{ quand } x \to -\infty,$$

d'où $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$. On déduit de ce qui précède le graphe de la fonction.



Deuxième partie

9) La fonction $t \mapsto e^{-x \sin t}$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration $[0, \pi/2]$, on a $\varphi(x) > 0$. Comme φ est strictement décroissante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \pi/2 \;.$$

10) Si $u_2 = \alpha$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 2. La suite est même constante, puisque φ étant injective l'équation $\varphi(x) = \alpha$ n'admet que la solution α et donc $u_1 = \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

11) Comme φ est strictement décroissante, on a $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$, d'où $u_3 > \alpha$. On en déduit par récurrence simple

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1} \;.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists\, a \in [\alpha, u_n] \; n \in \mathbb{N}^*_+, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(a)(u_n - \alpha) \;.$$

On en déduit que $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$, c'est à dire suite $|u_n - \alpha|$ est strictement décroissante. On en déduit avec ce qui précède que

$$\begin{aligned} \alpha - u_{2n+2} &< \alpha - u_{2n} \\ u_{2n} &< u_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus comme φ est décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît strictement. Pour tout $x \in [u_2, u_3]$, on a $\varphi'(u_2) \leq \varphi'(x) < 0$ et $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|.|u_n - \alpha|$. Ainsi $\forall n \geq 2, |u_n - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|^{n-2}|u_2 - \alpha|$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

12) Si $u_2 > \alpha$, alors $0 < u_1 < \alpha$ et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs et la conclusion est identique.