ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$1^{ère}$ **COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.
Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Soit a réel positif ou nul. On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+a)}$ pour $n \geq 1$. $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \dots x_n$.

1) Si $a \in [0,1]$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est divergente. On montrera que l'on a l'inégalité

$$u_n \geq \frac{1}{n+1}$$

2) On suppose que $a > 1$ et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i,\ n \geq 1$.

a) Démontrer, pour $n \geq 2$, la relation

$$S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}\, u_n.$$

b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

c) Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite des intégrales $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n} x \, dx$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n existe. Calculer J_0.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}. En déduire une expression de J_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire la convergence de cette suite.

3) a) Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ de terme général

$$u_k = \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right).$$

b) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

a) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < J_n \leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} x \, dx$.

b) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème

On considère la fonction $f(t) = e^{-\sin t}$ définie sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} f(t)^x \, dt$.

Première partie

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(t)$ sur $[-\pi, \pi]$. La tracer sur $[-\pi, \pi]$ et en déduire la forme de la fonction sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ (on utilisera pour cela l'égalité ou l'inégalité de Taylor-Lagrange).

3) En déduire que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt| \leq \frac{1}{2} h^2 e^{|h|} \varphi(x).$$

4) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt.$$

Indiquer sans démonstration rigoureuse pourquoi φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée seconde.

5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$. Montrer également que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $-1 < \varphi'(x) < 0$.

6) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ (on pourra montrer que $sin(t)$ est concave sur $[0, \pi/2]$).

7) *On rappelle que* $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}) < 0{,}993$. Étudier sur $\mathbb{R}$, les variations de la fonction $x \mapsto x - \varphi(x)$. En déduire qu'il existe un et un seul réel x tel que $\varphi(x) = x$. On note α ce réel. Montrer que $0 < \alpha < 1$.

8) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$. En déduire un tracé de la fonction $\varphi(x)$.

Deuxième Partie

On définit maintenant la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

9) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(\varphi(x)) < \frac{\pi}{2}$ et en déduire un encadrement pour u_2 quelle que soit la valeur de u_0.

10) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_2 = \alpha$?

11) On suppose désormais que $u_2 < \alpha$. Montrer que $u_2 < \alpha < u_3$ et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.

Montrer que, pour tout $x \in [u_2, u_3]$, $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

12) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_2 > \alpha$?