AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

Partie I : Les polynômes de Legendre

1. (a) $(t^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant 1 et L_n est sa dérivée $n^{\text{ième}}$ donc,

$\boxed{L_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2n(2n-1)\cdots(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n!}}$.

(b)

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= \left((t^2-1)^0\right)^{(0)} = 1 \\
L_1(t) &= \left((t^2-1)^1\right)^{(1)} = (t^2-1)' = 2t \\
L_2(t) &= \left((t^2-1)^2\right)^{(2)} = (t^4-2t^2+1)'' = 12t^2-4 \\
L_3(t) &= \left((t^2-1)^3\right)^{(3)} = (t^6-3t^4+3t^2-1)^{(3)} = 6\times5\times4t^3 - 3\times4\times3\times2t = 120t^3-72t\ .
\end{aligned}$$

(c) Pour tout n, $(t^2-1)^n$ est un polynôme pair donc, pour k pair ($k \leq 2n$), $\frac{d^k}{dx^k}(t^2-1)^n$ est un polynôme pair, et pour k impair, $\frac{d^k}{dx^k}(t^2-1)^n$ est un polynôme impair. En particulier, $\boxed{L_n \text{ a la même parité que } n.}$

(d) Démonstration par récurrence. On a $L_0(1) = 1 = 2^0 \times 0!$, l'assertion est vraie pour $n = 0$. Supposons que $L_{n-1}(1) = 2^{n-1}(n-1)!$. En appliquant la formule de Leibniz et en remarquant que seules les dérivées premières et secondes de (t^2-1) ne sont pas nulles :

$$\begin{aligned}
\left((t^2-1)(t^2-1)^{n-1}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (t^2-1)^{(k)}\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-k)} \\
&= (t^2-1)\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n)} + C_n^1(t^2-1)'\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-1)} \\
&\quad + C_n^2(t^2-1)''\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-2)} \\
&= (t^2-1)\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n)} + C_n^1 2t\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-1)} \\
&\quad + C_n^2 2\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-2)}\ .
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la caractérisation des racines multiples à l'aide des dérivées successives, 1 est racine simple de $\left((t^2-1)^{n-1}\right)^{(n-2)}$ car 1 est racine de multiplicité

$n-1$ de $(t^2-1)^{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\big((t^2-1)(t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)}(1) &= (t^2-1)\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)}(1) + C_n^1 2\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-1)}(1) \\
&\quad + C_n^2 2\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-2)}(1) \\
&= n \times 2 \times 2^{n-1}(n-1)! + C_n^2 2 \times 0 \\
&= 2^n \times n!\ .
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(1) = 2^n \times n!}\ .$$

D'après la parité de L_n,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(-1) = (-2)^n \times n!}\ .$$

2. Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\big\langle L_n, L_m \big\rangle &= \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\Big)dt \\
&= \Big[\Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\Big)\Big]_{-1}^{1} \qquad (1)\\
&\quad - \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\Big)dt\ .
\end{aligned}$$

En remarquant que pour $1 \leq k \leq n$, 1 et -1 sont racines multiples d'ordre k de $\big((t^2-1)^n\big)^{(n-k)}$, ce qui fait que le "crochet" dans l'intégration par parties est nul et en réitérant n fois cette intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\big\langle L_n, L_m \big\rangle &= -\int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\Big)dt \\
&\ \vdots \qquad (2)\\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \Big(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\Big)dt\ .
\end{aligned}$$

3. Puisque par définition pour tout entier n, $\|K_n\| = 1$, il suffit de montrer que la famille $\big\{L_n \ :\ n \in \mathbb{N}\big\}$ est orthogonale. Soit n et m deux entiers naturels distincts, supposons que $n > m$, alors $\Big(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\Big) = 0$, car c'est la dérivée $(n+m)^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré $2m$, avec $n+m > 2m$. On en déduit que $\big\langle L_n, L_m \big\rangle = 0$ pour tout entiers $n \neq m$. Ce qui prouve que la famille est orthogonale

4. (a) Considérons l'espace $\mathrm{Vect}(f, F_n)$. Puisque $\pi_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur F_n, on a

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \big\langle f - \pi_n(f), K_j \big\rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \big\langle f, K_j \big\rangle = \big\langle \pi_n(f), K_j \big\rangle\ .$$

Dans l'espace vectoriel euclidien F_n de base orthonormée $(K_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}$, on a la décomposition

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle \pi_n(f), K_j \rangle K_j = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j \rangle K_j \ .$$

Toujours parce que $(K_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}$ est orthonormée

$$\|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j \rangle^2 \ .$$

(b) D'après le théorème de Pythagore,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\pi_n(f)\|^2 + \|f - \pi_n(f)\|^2 = \|f\|^2 \ ,$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j \rangle^2 \leq \|f\|^2 \ .$$

On en déduit que la série de terme général $\langle f, K_n \rangle^2$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n \rangle^2 \leq \|f\|^2$.

Partie II : Opérateurs linéaires positifs et densité de $\mathbb{R}[x]$ dans E

5. **Propriétes des opérateurs linéaires positifs**

(a) Soit u un opérateur linéaire positif sur E. Montrons tout d'abord que l'application u est croissante pour la relation d'ordre partiel. En effet, pour tout $f, g \in E$

$$f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow u(f-g) \geq 0 \Rightarrow u(f) - u(g) \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq u(g) \ .$$

Pour montrer l'inégalité annoncée, il suffit de remarquer que

$$\Big(f \leq |f| \ \text{ et } \ -f \leq |f|\Big) \Rightarrow \Big(u(f) \leq u(|f|) \ \text{ et } \ -u(f) = u(-f) \leq u(|f|)\Big) \ .$$

(b) Il est clair que si u est l'opérateur nul alors $u(Q_0) = 0$. Réciproquement, supposons que $u(Q_0) = 0$. Soit $f \in E$ alors f est bornée par une constante $C > 0$, car elle est continue sur le compact I. On a donc $|f| \leq C = CQ_0 \Rightarrow |u(f)| \leq u(CQ_0) = Cu(Q_0) = 0$, donc $u(f) = 0$. Ce qui démontre que pour tout $f \in E$, $u(f) = 0$.

(c) Soit u un opérateur linéaire positif non nul sur E. Soit $f \in E$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty Q_0$, ce qui donne $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(Q_0)$. De même, si $f, g \in E$, on a

$$|u(f) - u(g)| = |u(f-g)| \leq u(|f-g|) \leq \|f-g\|_\infty u(Q_0) \ ,$$

Or $u(Q_0) > 0$ car $Q_0 > 0$, ce qui montre la continuité de u.

(d) Si les fonctions $(u_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ sont positives il est évident que l'opérateur u_n est positif. Réciproquement, supposons que l'opérateur u_n est positif. Soit $0 \leq j \leq n$, puisque les réels $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots x_{n,n}$ sont distincts, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x_{n,j} \in I_j =]x_{n,j} - \delta, x_{n,j} + \delta[\cap I \quad \text{et} \quad x_{n,k} \notin I_j, \quad \forall k \neq j \ .$$

On peut donc construire une fonction $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x_{n,j}) = 1$ et $f(x_{n,k}) = 0$, $\forall k \neq j$. On a donc pour une telle fonction f,

$$u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k}) u_{n,k} = u_{n,j} \ .$$

Comme u_n est positif, on en déduit que la fonction $u_{n,j}$ est positive.

(e) *Pour cette question on suppose que $I = [0,1]$, on se place donc dans $E = \mathcal{C}^0([0,1])$.*

i. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_y(k/n) B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{(k/n)y} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(x e^{(y/n)}\big)^k (1-x)^{n-k} \\ &= \big(1 - x + x e^{(y/n)}\big)^n \\ &= \varphi_n(x,y) \ . \end{aligned}$$

ii. On a

$$B_n(Q_j)(x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n)^j B_{n,k}(x) \ .$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,y) &= \frac{\partial^j}{\partial y^j}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{(ky/n)} B_{n,k}(x)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{d^j\big(e^{(ky/n)}\big)}{dy^j} B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \big(k/n\big)^j e^{(ky/n)} B_{n,k}(x) \ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \big(k/n\big)^j B_{n,k}(x) = B_n(Q_j)(x) \ .$$

iii. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_n(Q_0)(x) &= \varphi_n(x,0) = 1 \ , \\
B_n(Q_1)(x) &= n\frac{x}{n}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-1} = x \ , \\
B_n(Q_2)(x) &= \frac{n-1}{n}x^2e^{(0/n)}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-2} \\
&\quad + \frac{1}{n}xe^{(0/n)}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x \ .
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$B_n(Q_0) = Q_0, \quad B_n(Q_1) = Q_1 \quad \text{et} \quad B_n(Q_2) = \frac{1}{n}Q_1 + \frac{n-1}{n}Q_2 \ .$$

6. **Densité de $\mathbb{R}[x]$ dans E.**

(a) La fonction f étant continue sur le compact I, elle est donc uniformément continue sur I. Donc

$$\forall\varepsilon > 0, \ \ \exists\eta > 0, \ \ \forall(x,y) \in I^2, \qquad |x-y| \leq \eta \Rightarrow \big|f(x)-f(y)\big| \leq \varepsilon \ . \tag{3}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ défini comme ci-dessus. Soit $(t,x) \in I^2$. Nous allons traiter les deux cas $|t-x| \leq \eta$ et $|t-x| > \eta$ séparément :
- Si $|t-x| \leq \eta$, alors d'après l'uniforme continuité de f, on a

$$\big|f(x)-f(t)\big| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

- Si $|t-x| > \eta$, alors

$$\big|f(x)-f(t)\big| \leq 2\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty\frac{(t-s)^2}{(t-s)^2} \leq 2\|f\|_\infty\frac{(t-s)^2}{\eta^2} \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

On en déduit donc que

$$\forall(t,x) \in I \times I, \qquad \big|f(t)-f(x)\big| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

(b) C'est une conséquence du résultat de la question précédente. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$\forall(t,x) \in I \times I, \qquad \big|f(t)-f(x)\big| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t^2-2tx+x^2\big) \ ,$$

ce qui peut s'écrire comme

$$\forall x \in I, \ \ \forall t \in I, \qquad \big|f(t)-f(x)Q_0(t)\big| \leq \varepsilon Q_0(t) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(Q_2(t)-2xQ_1(t)+x^2Q_0(t)\big),$$

ce qui donne le résultat demandé.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, la positivité de u, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned}|u(f - f(x)Q_0)| &\leq u(|f - f(x)Q_0|) \\ &\leq u\Big(\varepsilon Q_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(Q_2 - 2xQ_1 + x^2Q_0)\Big) \\ &\leq \varepsilon u(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(u(Q_2) - 2xu(Q_1) + x^2u(Q_0)\big) .\end{aligned}$$

(d) i. Soit $\varepsilon > 0$, puisque pour $0 \leq j \leq 2$, $u_n(Q_j)$ converge uniformément vers Q_j sur I, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, et $0 \leq j \leq 2$

$$\|u_n(Q_j) - Q_j\|_\infty \leq \varepsilon .$$

En remarquant que pour tout tout $t \in I$,

$$\big(Q_2 - 2Q_1^2 + 2Q_2Q_0\big)(t) = t^2 - 2t^2 + t^2 = 0 ,$$

on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\big\|u_n(Q_2) - 2Q_1u_n(Q_1) + Q_2u_n(Q_0)\big\|_\infty \\ &\quad = \big\|\big(u_n(Q_2) - Q_2\big) - 2Q_1\big(u_n(Q_1) - Q_1\big) + Q_2\big(u_n(Q_0) - Q_0\big)\big\|_\infty \\ &\quad \leq \big\|u_n(Q_2) - Q_2\big\|_\infty + 2\|Q_1\|_\infty\big\|u_n(Q_1) - Q_1\big\|_\infty + \|Q_2\|_\infty\big\|u_n(Q_0) - Q_0\big\|_\infty .\end{aligned}$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur I.

ii. D'après l'inégalité (5), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}|h_n(x)| &= \big|u_n(f - f(x)Q_0)(x)\big| \\ &\leq \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(u_n(Q_2) - 2xu_n(Q_1) + x^2u_n(Q_0)\big)(x) \\ &= \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}g_n(x) .\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon\|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty + \varepsilon\|Q_0\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\|g_n\|_\infty .$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\|g_n\|_\infty = 0$, on obtient par passage à la limite

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon\|Q_0\|_\infty .$$

Ce qui prouve que h_n converge vers la fonction nulle quand n tend vers $+\infty$.

iii. On a pour tout $x \in I$

$$h_n(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(Q_0)(x),$$

donc

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)\big(u_n(Q_0)(x) - Q_0(x)\big) .$$

On en déduit que

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty .$$

Puisque le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en conclut que $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

(e) Comme les opérateurs B_n sont positifs et compte tenu de ce qui précéde, pour montrer que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f, il suffit de montrer que $(B_n(Q_j))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers Q_j pour $0 \leq j \leq 2$. Puisque $B_n(Q_0) = Q_0$ et que $B_n(Q_1) = Q_1$, il reste à montrer la convergence uniforme de $B_n(Q_2)$ vers Q_2. Or $B_n(Q_2) = \frac{1}{n}Q_1 + \frac{n-1}{n}Q_2$ ce qui implique

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(Q_2) - Q_2\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|Q_1 - Q_2\|_\infty = 0 .$$

(f) On remarque tout d'abord que sur $[0,1]$, pour tout $n \geq 1$, $B_n(f)$ est un polynôme, donc de la question précédente on déduit la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ pour la norme de le convergence uniforme.

Si maintenant $I = [a,b]$, on considére la fonction $\tau_{a,b} : [0,1] \to I$ définie par $\tau_{a,b}(x) = a + (b-a)x$ qui est polynômiale et dont la réciproque est polynômiale. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f \circ \tau_{a,b} \in \mathcal{C}^0([0,1])$. De la remarque précédente, on déduit alors que $(B_n(f\circ\tau_{a,b}))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $f \circ \tau_{a,b}$, donc que $\Big(B_n(f \circ \tau_{a,b}) \circ \tau_{a,b}^{-1}\Big)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f. Par conséquent, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(I)$ pour la norme de le convergence uniforme.

(g) Montrons tout d'abord que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\|f\| \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty ,$$

soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, on a

$$\forall t \in [a,b], \quad |f(t)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \forall t \in [a,b], \quad |f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2 .$$

Ce qui implique

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt} \leq \sqrt{(b-a)\|f\|_\infty^2} = \sqrt{(b-a)}\|f\|_\infty .$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers f sur I, donc $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$. D'après la remarque précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|p_n - f\| \leq \sqrt{b-a}\|p_n - f\|_\infty ,$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\| = 0$ et par la suite la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ pour la norme $\|.\|$.