

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1^{ère} Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)



Définitions et notations

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, où $a < b$ sont deux réels. On note $E = \mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur I .

Pour f et g éléments de E , on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$, on rappelle que cette norme est définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}. \quad (1)$$

Ainsi $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé et on dit alors que E est muni d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une famille $\mathcal{E} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 ; \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Partie I : Les polynômes de Legendre

Dans cette partie on se place dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $E = \mathcal{C}^0([-1, 1])$ muni de la norme $\| \cdot \|$ définie par (1).

1. Quel que soit l'entier n , on définit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$L_n : t \longrightarrow \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n.$$

En particulier, L_0 est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré de L_n .

- (b) Expliciter L_1, L_2 et L_3 .
- (c) Préciser pour tout entier naturel n , la parité de L_n .
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$. On pourra utiliser la formule de Leibniz.

2. Montrer que pour tous entiers naturels n et m ,

$$\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \left(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2 - 1)^m \right) dt ,$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire défini par (1).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|} L_n .$$



Montrer que la famille $\mathcal{L} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ est orthonormale.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n . Ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de E sur F_n .

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout élément f de E ,

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle K_j \quad \text{et} \quad \|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^n \langle f, K_j \rangle^2 .$$

(b) Montrer que, quelle que soit f appartenant à E , la série de terme général $\langle f, K_n \rangle^2$ est convergente et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n \rangle^2 \leq \|f\|^2 .$$

Partie II : Opérateurs linéaires positifs et densité de $\mathbb{R}[x]$ dans E

On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Un élément de $\mathcal{L}(E)$ est aussi appelé un opérateur linéaire sur E .

On dit qu'un opérateur linéaire sur E est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à E en une fonction positive.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales d'une variable réelle à coefficients réels et on le munit de la base $\{Q_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ définie par

$$(\forall k \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad Q_k(x) = x^k .$$

On considère la norme de la convergence uniforme sur E définie par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| .$$

5. Propriétés des opérateurs linéaires positifs



- (a) Soit u un opérateur linéaire positif sur E . Montrer que

$$(\forall f \in E), \quad |u(f)| \leq u(|f|).$$

- (b) Soit u un opérateur linéaire positif sur E . Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(Q_0) = 0$.
- (c) Montrer que tout opérateur linéaire positif sur E est continu.
- (d) Soit n un entier strictement positif. Etant donnés $n + 1$ points $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ deux à deux distincts de I et $n + 1$ fonctions $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ de E , montrer que l'opérateur linéaire u_n défini sur E par :

$$(\forall f \in E), \quad u_n(f) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$ pour $0 \leq k \leq n$, sont positives.

- (e) Pour cette question on suppose que $I = [0, 1]$, on se place donc dans $E = C^0([0, 1])$. On note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(x, y) = (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^n.$$

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par

$$\forall f \in E, \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \quad (2)$$

- i. Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que

$$\forall x \in I, \quad B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

- ii. Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(Q_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

- iii. Exprimer $B_n(Q_j)$ dans la base $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

6. Densité de $\mathbb{R}[x]$ dans E

- (a) Soit f un élément de E . Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2. \quad (3)$$

- (b) Pour toute fonction g appartenant à E , pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I , on désigne par $g - g(x)Q_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$t \longrightarrow g(t) - g(x)t^k .$$

Soit f appartenant à E . Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, t) \in I^2, \quad |f(t) - f(x)Q_0(t)| \leq \varepsilon Q_0(t) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (Q_2(t) - 2xQ_1(t) + x^2Q_0(t)). \quad (4)$$

- (c) Soit u un opérateur linéaire positif sur E et f une fonction appartenant à E . Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)Q_0)| \leq \varepsilon u(Q_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(Q_2) - 2xu(Q_1) + x^2u(Q_0)) . \quad (5)$$

- (d) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de E telle que pour tout f appartenant à $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

- i. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(Q_2) - 2Q_1u_n(Q_1) + Q_2u_n(Q_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

- ii. Montrer que pour toute fonction f appartenant à E , la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)Q_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (On peut utiliser l'inégalité (5)).

- iii. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à E , la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

- (e) Pour cette question on prend $I = [0, 1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n \geq 1}$ définie par (2).

Montrer que pour toute fonction f appartenant à E , la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

- (f) Pour cette question et la question suivante $I = [a, b]$ est un intervalle quelconque. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- (g) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par (1).