AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

1 Premier problème :

1. La fonction F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car F est clairement définie en 0 puisque c'est la somme d'une série entière et pour tout x non nul,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2} = 0$$

donc la série converge par la règle de d'Alembert.

F est paire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}, \qquad F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{(n!)^2}.$$

Pour tout $x \geq 0$, $F'(x) > 0$ donc F est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) > 0$ donc F est convexe.

2. (a) On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{2n+2}{2n+1} > 1$. Donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \geq v_0 = 1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2} \leq \dfrac{4^n}{(2n)!}$.

   Par la définition de F en déduit de cette inégalité, que pour $x \geq 0$:

$$F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(2x).$$

   (b) Considérons maintenant la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et appliquons le même raisonnement que la question précédente. On a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{2n+2}{2n+3} < 1$. Donc la suite (w_n) est décroissante et $w_n \leq w_0 = 1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2} \geq \dfrac{4^n}{(2n+1)!}$.

   On obtient, pour $x > 0$:

$$F(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x}.$$

(c) On a $G(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(2x)\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(4x)}{4x}}$ et on écrit

$$G(x) = \sqrt{\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{8x}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{2x}}\sqrt{1 - e^{-8x}},$$

d'où $G(x) \sim \frac{\Phi(x)}{2\sqrt{2}}$ au voisinage de $+\infty$.

3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de la forme $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ qd $t \to +\infty$ donc est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, posons $I_k(A) = \int_0^A t^k e^{-xt} dt$.

Pour $k = 0$, $I_0 = \lim\limits_{A \mapsto +\infty} I_0(A) = \lim\limits_{A \mapsto +\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A = \frac{1}{x}$ car $x > 0$. Pour $k > 0$, on obtient en intégrant par parties, $I_k(A) = \left[t^k \frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A + \frac{k}{x} I_{k-1}(A)$. On en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que $I_k = \frac{k}{x} I_{k-1}$. Une récurrence simple donne

$$I_k = \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

(b) Montrons d'abord que l'intégrale existe. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. D'après la question 2, $\forall t \geq 0$, $0 \leq F(t)e^{-xt} \leq \operatorname{ch}(2t)e^{-xt}$ et lorsque $t \to +\infty$, $\operatorname{ch}(2t)e^{-xt} \sim \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$.
Si $x > 2$, $t \mapsto \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $t \mapsto \operatorname{ch}(2t)e^{-xt}$ aussi, d'après le théorème des équivalents, enfin$t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est aussi intégrable d'après le théorème de comparaison.

Pour tout $x > 2$, $L(F)(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}\right) e^{-xt} dt$. Posons $X_n(t) = \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$.
La série de fonctions $\sum X_n(t)$ converge sur $[0, +\infty[$ et sa somme $F(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Il est clair que pour tout n, X_n est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$.
Pour tout n, posons $J_n = \int_0^{+\infty} |X_n(t)|\, dt$ et montrons que la série de terme général J_n est convergente. On a $J_n = \int_0^{+\infty} X_n(t) dt = \frac{1}{(n!)^2} I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$. Utilisons le critère de d'Alembert : on a $\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 x^2}$ qui tend vers $\frac{4}{x^2}$ quand n tend vers $+\infty$, or $x > 2$ implique $\frac{4}{x^2} < 1$, donc $\sum \int_0^{+\infty} |X_n|\,(t) dt$ converge.
On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Donc

$$L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} X_n(t) dt$$

et en conclusion

$$L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}\,, \quad \text{pour tout } x > 2\,.$$

(c) Pour $t > 0$ posons $g_n = g_n(t) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}$. On a $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{2(2n+1)t^2}{(n+1)}$ qui tend vers $4t^2$ lorsque n tend vers ∞. La règle de d'Alembert entraine que la série $\sum g_n$ converge pour $4t^2 < 1$ et diverge pour $4t^2 > 1$; son rayon de convergence R est donc égal à $1/2$.
Pour $|u| < 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+u}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)...(-1/2-n+1)}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} u^n \ . \end{aligned}$$

En posant $u = -4t^2$ pour $|t| < 1/4$ on a bien $|u| < 1$ et on obtient $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ pour $|t| < \frac{1}{4}$.

(d) Pour tout $x > 2$,

$$L(F)(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x} g(\frac{1}{x}) \ ,$$

d'où

$$L(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \ .$$

(e) $t \mapsto \Phi(t)e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(2-x)t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, équivalent à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 donc intégrable sur $]0, 1]$. Au voisinage de $+\infty$: si $2 - x < 0$ alors $\Phi(t)e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $[1, +\infty[$; si $2 - x \geq 0$ alors $\Phi(t)e^{-xt} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc $L(\Phi)$ est définie sur $]2, +\infty[$.
On fait le changement de variable $u = \sqrt{t(x-2)}$ et on obtient

$$L(\Phi)(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}} \ .$$

Deuxième probléme

2 Partie I :

1. Comme φ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h\varphi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$. Posons $u_n = h\varphi(nh)$ et $v_n = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sum_{i=1}^{n} v_i = \int_0^{nh} \varphi(t)dt$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < \infty$, on déduit la convergence de la série $\sum u_n$ par domination, car $u_n \geq 0$ pour tout n,.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $V_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Par la décroissance de φ, on a $v_{i+1} \leq u_i \leq v_i$ et, en sommant ces inégalités, on a

$$V_{n+1} - v_1 \leq U_n \leq V_n$$

ce qui donne par passage à la limite, quand $n \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_0^{h} \varphi(t)dt \leq \sum_{i=1}^{+\infty} h\varphi(ih) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

Vu que $\lim_{h\to 0} \int_0^h \varphi(t)dt = 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

2. (a) Par la décroissance de φ, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 \leq C &= \int_0^1 \varphi(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \Big\{ \sum_{k=2}^{n} \big(\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k-1) \big) - \varphi(n) \Big\} \\ &\leq \int_0^1 \varphi(t)dt - \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) \ . \end{aligned}$$

De plus, la suite réelle $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc elle est convergente. D'où l'existence de C.

(b) Considérons tout d'abord le cas $x < 1$: on a

$$\psi(x) = -\int_0^x \varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k) \right]$$

et donc, grâce à la question précédente, $\psi(x) \leq -\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt$. Comme $\varphi(x) > 0$ on a

$$\psi(x) \leq \int_x^1 \varphi(t)dt \leq (1-x)\varphi(x) \leq \varphi(x) \ .$$

Il nous faut maintenant l'inégalité $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geq -1$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k) \right] \\ &\geq \int_x^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) \geq -\varphi(1) \\ &\geq -\varphi(x) \ , \end{aligned}$$

car φ est décroissante. Pour traiter le cas $x \geq 1$, on écrit, après transformation,

$$\psi(x) = -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \sum_{k=E(x)+1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k)\right]$$

puis on applique des inégalités semblables a celles du cas précédent :

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\leq -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t)dt \\
&= \int_{x}^{E(x)+1} \varphi(t)dt \\
&\leq \varphi(x)\big(E(x)+1-x\big) \ \leq \varphi(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t)dt - \varphi(E(x)+1) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=E(x)+2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k)\right] \\
&\geq \int_{x}^{E(x)+1} \varphi(t)dt - \varphi(E(x)+1) \geq -\varphi(E(x)+1) \\
&\geq -\varphi(x) \qquad\qquad \text{car } \varphi \text{ est décroissante .}
\end{aligned}$$

3. Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

   Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$, on a pour $0 < x < 1$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

   donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

4. On pose $h = -\ln x$ et on considère la fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nh} = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh).$$

   On utilise le I1° appliqué à la fonction φ qui est continue sur $]0,+\infty[$, décroissante, positive et vérifie $\int_0^{\infty} \varphi(t)dt < \infty$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) \sim \frac{I}{\sqrt{h}}$$

   où $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

En conclusion, comme $h = -\ln x \sim 1 - x$ en 1, on a bien

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

5. Pour $y \geq 1$, on a $s(y) = \sum_{n=1}^{E(y)} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = A_{E(y)}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h \int_n^{n+1} s(y) e^{-hy} dy = A_n (e^{-nh} - e^{-(n+1)h})$$

.

D'où pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
h \int_0^n s(y) e^{-hy} dy &= h \int_1^n s(y) e^{-hy} dy \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (e^{-kh} - e^{-(k+1)h}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{-kh} - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} e^{-kh} \\
&= -A_n e^{-nh} + A_1 e^{-h} + \sum_{k=2}^{n} [A_k - A_{k-1}] e^{-kh} \\
&= -A_n e^{-nh} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kh}.
\end{aligned}$$

Comme $A_n e^{-nh}$ a une limite nulle en $+\infty$ (car $A_n \leq n$), $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n s(y) e^{-hy} dy$ existe. On peut donc prendre la limite dans l'égalité du dessus, on en déduit que $f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy} dy$.

6. (a) On considère la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Avec les notations du I.2. on a $\psi(x) = s(x) - 2\sqrt{x} + C$, où $C = \lim\limits_{n\to\infty} \big(2\sqrt{n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\big)$ et par la question 1.2.(b),

$$|\psi(x)| = |s(x) - 2\sqrt{x} + C| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\left| \int_0^{+\infty} h\psi(t) e^{-ht} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{t}} e^{-ht} dt = \sqrt{h} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}\sqrt{h}$$

et d'après le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(e^{-h}) &= h \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-ht} dt + 2h \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-ht} dt - Ch \int_0^{+\infty} e^{-ht} dt \\
&= h \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-ht} dt + \frac{\sqrt{\pi}}{h} - C \ ,
\end{aligned}$$

car $2h\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-ht}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{h}$ et $h\int_0^{+\infty}e^{-ht}dt = 1$. Il vient ainsi:

$$\left|f(e^{-h}) - \frac{\sqrt{\pi}}{h} + C\right| \leq \sqrt{\pi h}.$$

Or, par un calcul simple, on prouve que

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to1} f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = -C$$

où

$$C = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{dt}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to+\infty}2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}\ .$$

(b) $f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est bien définie comme somme d'une série alternée. On pose alors:

$$B_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}},\ A_n = \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On sépare dans chacune de ces deux sommes les termes pairs et impairs, ce qui s'écrit:

$$\begin{aligned}B_{2n} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\ A_{2n} &= \quad\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$B_{2n} + A_{2n} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2}A_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = A_n - 2\sqrt{n} + C$. On a $A_n = 2\sqrt{n} - C + x_n$ et $A_{2n} = 2\sqrt{2n} - C + x_{2n}$ on en déduit que

$$B_{2n} = \sqrt{2}A_n - A_{2n} = (1-\sqrt{2})C + (\sqrt{2}x_n - x_{2n}),$$

en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f(-1) = (1-\sqrt{2})C$ soit encore $-C = (\sqrt{2}+1)f(-1)$.